RFA1

Pomocný text k jednosemestrální přednášce „Relativistická fyzika a astrofyzika I“, kterou přednáší na Slezské univerzitě v Opavě Prof. RNDr. Zdeněk Stuchlík, CSc.
Za všechny překlepy a případné chyby mohou otročtí přepisovči, v žádnem přípdě ne pan Profesor! :-)

Toto je rozpracovaná a neopravená verze.

Obsah

Kapitola 1

STR

Výchozí principy:

- Existuje inerciální systém.
- Všechny inerciální systémy jsou rovnocené (speciální princip relativity).
- Světlo se šíří ve všech inerciálních systémech stejnou rychlostí (princip konstantí rychlosti světla).

Zákony jsou invariantí vůči Lorentzově transformaci. Prostoročas:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ \mathrm{d}s'^2 &= -c^2\,\mathrm{d}t'^2 + \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2 \end{aligned}$$

Prostoročasový interval invariantní vůči Lorentzově transformaci:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$$

$$x^0 = ct; \quad x^1 = x; \quad x^2 = y; \quad x^3 = z.$$

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha x^\beta; \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorentzova transformace

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu; \quad \Lambda^0{}_0 = \Lambda^1{}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Lambda^0{}_1 = \Lambda^1{}_0 = \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad \Lambda^2{}_2 = \Lambda^3{}_3 = 1, \Lambda^\alpha{}_\beta = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathrm{d}x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\,\mathrm{d}x^\nu; \tag{1.2}$$

$$\mathrm{d}s'^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x'^\mu\,\mathrm{d}x'^\nu = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$$

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2; \qquad \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\,\mathrm{d}x^\alpha; \quad \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \equiv \Lambda^\mu{}_\alpha$$

$$\mathrm{d}x^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\,\mathrm{d}x'^\nu; \quad \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} = \delta^\beta_\alpha$$

4-vektory $A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha$ kovariantní, Skalár = invariant Lorentzovy transformace $\bar{A}\cdot\bar{B} = \eta_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta$ - skalární součin.

$$a\text{- skalár;} \quad a_{,\alpha} = \frac{\partial a}{\partial x^\alpha}; \quad a'_{,\mu} = \frac{\partial a'}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial a}{\partial x'^\mu}$$

$$a,'_\mu = \frac{\partial a}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial a}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}a_{,\alpha}$$

kovariantní $A'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}A_\alpha$.

4-tenzory

$$T'^{\mu\nu}{}_\rho = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho}\,T^{\alpha\beta}{}_\gamma$$

Kontravariantní Minkovského tenzor $\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}l^2; \qquad \mathrm{d}l^2 = v^2\,\mathrm{d}t^2 < c^2t^2 => \mathrm{d}s^2 < 0$$

Vlastní čas $\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{c}\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta}$ $\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,\mathrm{d}t^2 - v^2\,\mathrm{d}t^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t$ dilatace času 4-rychlost $U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$; $U^\mu U_\mu = -c^2$

$$U^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} => U^i = \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad U^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

4-zrychlení $A^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}$; $U_\mu\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0$

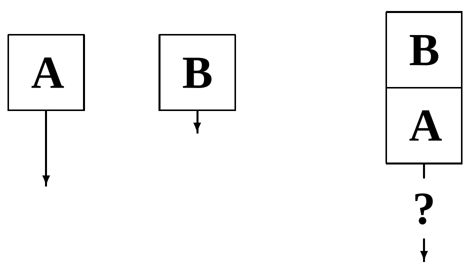
4-hybnost $P^\mu = m_0$

Kapitola 2

OTR - Základní principy

2.1 Princip ekvivalence

Vliv gravitace (pád v gravitačním poli), podle Aristotelea: Těžší tělesa padají rychleji, než lehčí.



Těžší těleso A padá rychleji, než lehčí B. Pokud A spojíme s B, pak B bude brzdit A, ovšem spojená tělesa A a B jsou těžší než jednotlivé komponetny a padají rychleji, což je logický spor. Podle G.Galileo padají všechna tělesa se stejným zrychlením.

Z klasické mechaniky známe jak 2. Newtonův zákon síly $m\vec{a} = \vec{F}$, tak i Newtonův gravitační zákon $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, kde m je hmotnost telesa a M hmotnost Země. Z těchto dvou rovnic plyne, že zrychlení padajícího tělesa je nezávislé na jeho hmotnosti

$$\vec{a} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Setrvačná hmotnost $m_s\vec{a} = \vec{F}$ gravitačí hmotnost (náboj) $\vec{F} = -G\frac{m_g M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
Pasivní, aktivní gravitační hmotnost

$$\vec{F_m} = -G\frac{m_{g-pas}M_{g-ak}}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$
$$\vec{F_M} = -G\frac{M_{g-pas}m_{g-ak}}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

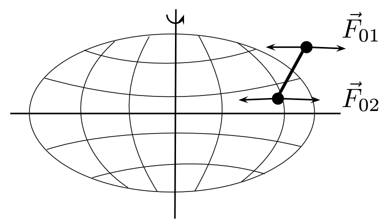
Zákon akce a reakce: $\vec{F_m} = -\vec{F_m}$ a tedy

$$\frac{m_{g-pas}}{m_{g-ak}} = \frac{M_{g-pas}}{M_{g-ak}}$$

Jednotky lze zvolit tak, aby $m_{g-pas} = m_{g-ak}$ a tedy

$$\vec{a} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{m_g}{m_s}$$

Ovšm z teorie vůbec neplyne, že $m_g = m_s$, proto je tato shoda podivuhodná. Poměr $\frac{m_s}{m_g}$ je nutno určit měřením. Newton - kyvadlo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{m_s}{m_g}}$; $m_s = m_g$ na 10^{-3} Bessel na $2\cdot 10^{-5}$



Statické experimenty Eotvos (r.1889); torzní váhy Vzdálenost obou tělěs od osy otáčení Země stejná (rameno vah - V-Z) $F_1 > F_2$ Těleso 1 vychýlí k Jihu. Otáčení vůči přístoroji - změna při otočení o 180^{o}C

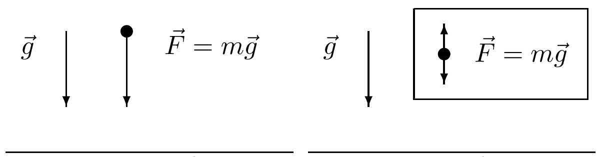
$$\frac{m_s}{m_g} = 1 \pm 5\cdot 10^{-8}(3\cdot 10^{-9})$$

Odstředivá síla oběhu Země kolem Slunce (srovnej s gravitční silou Slunce!) r. 1964 Hicho, Krothov, Roll. Přístroj není nutno otáčet (otáčení Země s 24 hodinovou periodou). Citlivost na lokální nehomogenity omezena použitím 3-rozměrného vahadla a tří tělšs místo dvou. Pozorovaná výchylka - přiblížení pozorováno na vzdálenost několika metrů, rosa na trávě v nedalekém parku, rozdíly v teplotě $< 10^{-4}$K, Hliník + zlato $\frac{m_s}{m_g} = 1 \pm 10^{-11}$, Hliník + platina $\frac{m_s}{m_g} = 1 \pm 10^{-12}$.

Důsledky: Platí nejen pro hliník a zlato, nýbrž i pro protony a neutrony $n_n/n_p = 1.08$ u hliníku a $n_n/n_p = 1.5$ u zlata. Gravitačí hmotnost rovna relativistické (nikoliv klidové) s přesností 10^{-5} Ke gravitační i vazebná elstat energie $(5\cdot 10^{-9})$ Jaderná vazebná energie (10^{-7}), gravitační vazebná energie (1%)

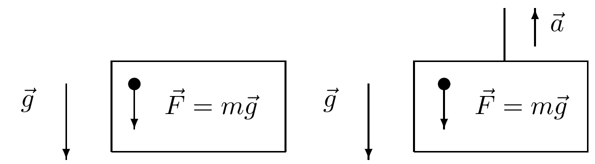
2.1.1 Slabý princip ekvivalence

- Gravitační hmotnost libovolného tělesa se rovná hmotnosti setrvačné.
- V daném gravitačním poli padají všechna tělesa se stejným zrychlením. Nejde lokálně zjistit, zda jde o gravitační pole, nebo setrvačné síly ve zrychleném systému.



systém statický $\vec{F} = m\vec{g}$ padající výtah $\vec{F} = 0$

Všechny fyzikální procesy probíhají stejně v gravitačním poli a ve zrychleném výtahu. Pokud je gravitační pole homogení $-\vec{a} = \vec{g}$.



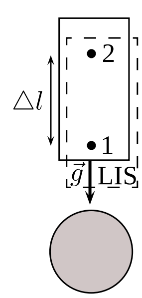
grav. pole $\vec{F} = m\vec{g}$ zrychlující výtah, setrvačná síla $\vec{F} = m(-\vec{a})$

Reálné gravitační pole je nehomogení. V padající zdviži lze lokálně zrušit gravitační pole a vyvolat beztížný stav.

gravitační pole zrzchlená soustava

2.2 Princip ekvivalence

Gravitační pole je lokálně ekvivalentí zrychlenému pohybu systému (poli setrvačných sil). V padajícím systému je gravitační pole zrušeno a fyzikální procesy probíhají dle zákonů STR. V každém bodě prostoročasu existuje lokálně inerciální systém (LIS), v němž platí fyzikální zákony jako v STR. Důsledkem principu ekvivalence je například rudý posuv záření a ohyb světla. **Rudý posuv:** Uvažujme situaci, kdy body 1 a 2 jsou v klidu vůči gravitačnímu poli a vzdálenost mezi nimi $\triangle l$ je velmi malá. Fregvenčí posuv světla vyslaného z bodu 1 do bodu 2 určíme v LIS. LIS v klidu v okamžiku vyslání signálu, v LIS se body 1 a 2 pohybují se zrychlením $-\vec{g}$ nahoru. Platí $\triangle t_{21} = \frac{\triangle l}{c}$. Rychlost bodu 2 je $v = g\triangle t = \frac{g\triangle l}{c}$ Dochází k Dopplerově efektu, fregvence bude nižší, platí



$$\frac{\triangle\nu}{\nu} = \frac{v}{c} = \frac{g\triangle l}{c^2}.$$

Rozdíl gravitačního potenciálu je $(\Phi_1 - \Phi_2) = \triangle\Phi = g\triangle l$.

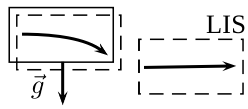
$$\frac{\triangle\nu}{\nu} = \frac{\triangle\Phi}{c^2}$$

Ztrátu energie fotonu spočteme pomocí $E = h\nu$; $m = h\nu/c^2$; odtud $\triangle E = m\triangle\Phi = \frac{h\nu}{c^2}\triangle\Phi$

$$\triangle\nu = \frac{\triangle E}{h} \Rightarrow \triangle\nu = \nu\frac{\triangle\Phi}{c^2}$$

Ohyb světla: V LIS se světlo šíří přímočaře v gravitačním poli se tedy ohýbá, neboť LIS se pohybují se zrychlením $\vec{g}$.

2.3 Princip obecné kovariance



Potíže s definicí inerciálního systému - nelze odstínit (globální) gravitační pole; nelze realizovat volné hmotné body. Dle principu ekvivalence existují lokální inerciální systémy (LIS), dohromady však netvoří globální inerciální systém. Gravitační pole způsobuje i potíže při synchronizaci hodin. **Princip obecné kovariance:** Fyzikální zákony mají týž tvar ve všech souřadných systémech (invariantní co se formy týče).
Princip Obecné relativity: Žádný souřadný systém nesmí být preferován. V STR jsou výrazně preferovány inerciální systémy. I při jiných souřadnicích se objeví členy určující vztah k IS (např. zrychlení systému). OTR definitivě opouští představu privilegovaných souřadnic („křivočará“ bude i časová souřadnice)

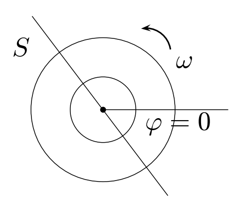
Kartézské souřadnice $x^1(=x), x^2(=y), x^3(=z)$; a válcové souřadnice R, φ, z, jsou svázány vztahy

$$x = R\cos(\varphi), \quad y = R\sin(\varphi), z = z.$$

Odtud spočteme jednotlivé diferenciály, například $\mathrm{d}x = \mathrm{d}R\cos(\varphi) - R\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. 4-interval (invariant) v různých souřadnicích

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2, \\ \mathrm{d}s^2 &= -(\mathrm{d}x^0)^2 + \mathrm{d}R^2 + R^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2,' \end{aligned}$$

kde $(\mathrm{d}x^0)^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2$. Chceme-li popsat poměry na rotujícím disku zavedem souřadnice t', R', φ', z' takto:



$$\begin{aligned} t' &= t,\ R' = R,\ z' = z, \\ \varphi' &= \varphi - \omega t; \\ \mathrm{d}\varphi &= \varphi' + \omega\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

4-interval je v tomto případě

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &- c^2\left(1 - \frac{\omega^2 R'^2}{c^2}\right)\mathrm{d}t'^2 \\ &+ \mathrm{d}R'^2 + R'^2\,\mathrm{d}\varphi'^2 + \mathrm{d}z'^2 + 2\omega R'^2\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}t'. \end{aligned}$$

Obecný zápis prostoročasového intervalu:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta, \qquad g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3),$$

kde metrika $g_{\alpha\beta}$ charakterizuje použitý souřadný systém i výsledky časových měření. Hodiny spojené s kolotočem ($R' = \varphi' = z' =$konst.). Chod hodin je dán časem

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-\,\mathrm{d}s^2} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 R'^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t'.$$

Rychlost nesmí být nadsvětelná a proto $\omega'^2 R'^2/c^2 > 1$ a tedy $R' < \frac{c}{|\omega|}$. Označíme-li $\omega R' = v$ ($\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$), pak platí

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

což je známý vztah pro dilataci času. Hodiny na rotujícím disku ($R' \neq 0$) jdou pomaleji než v IS. Vidíme, že informace o chodu hodin je obsažena v $g_{\alpha\beta}$. Podobně délková měření jsou obsažena v $g_{\alpha\beta}$. Rotační soustava S' je neinerciální - vyskytují se v ní setrvačné síly (odstředivá a Coriolisova). Tyto síly jsou určeny koeficienty $g_{\alpha\beta}$, ty tedy určují pole setrvačných sil. Dle principu ekvivalence jsou pole setrvačných sil a pole gravitační lokálně ekvivalentí. Pole setrvačných sil je určeno koeficienty $g_{\alpha\beta}$ ve výrazu pro 4-interval. Předpokládejme, že $g_{\alpha\beta}$ by mohly popisovat i gravitační pole. Probereme napřed, jak zapsat fyzikální zákony v obecných souřadných systémech.

Požadavky na souřadne systémy. Souřadnice jednoznačně určují body prostoročasu, blízkým bodům odpovídají blízské souřadnice. Při pohybu se souřadnice musí měnit spojitě. [1] „Hladkost“[2] soustavy souřadnic.Tyto podmínky lze realizovat je-li prostoročas tzv. diferencovatelnou varietou.

2.3.1 Zápis fyzikálních zákonů

Použijeme analogie ze STR. Veličiny mohou být skaláry, vektory, nebo tenzory[3]. Tenzorový chrakter rovnic značí, že budou mít týž tvar ve všech souřadných systémech. Mějme dva souřadné systémy, systém S se souřadnicemi x, a systém S', x'. Transformaci $S \to S'$ zapíšeme obecně jako

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu}),$$

jsou to funkce spojité a dostatečně diferencovatelné („hladké“). Jelikož souřadnice určují body jednoznačně, musí existovat inverzní transformace

$$x^{\beta} = x^{\beta}(x'^{\alpha}).$$

Skalár je veličina jenž se při transformaci nemění - (například 4-interval, vlastní čas, klidová hustota klidové hmotnosti). Pozici bodu určuje funkce 4-proměnách $x'^{\mu} = x'^{\mu}\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$. Můžeme definovat 4-rychlost (kontravariantí 4-vektor) jako

$$U^{\mu} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}$$

4-rychlost se při přechodu $S \to S'$ transformuje jako kontravariantí 4-vektor

$$U'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} U^{\alpha}$$

Diferenciály souřadnic se transformují jako kontravariantí 4-vektory

$$\mathrm{d}x'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x^{\alpha}.$$

Jak se transformuje kovariantí 4-vektor ukážeme na příkladu 4-rozměrný gradient skaláru

$$A'_{\mu} = a'_{,\mu} \equiv \frac{\partial a'}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial a}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} a_{,\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A_{\alpha}.$$

Obecně tedy platí

$$T'^{\mu\nu}{}_{\rho} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\rho}} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}.$$

Vídíme formální podobnost s transformacemi rovnic v STR, ovšem zde $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}, \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\rho}}$ nejsou konstanty. Parciální derivace obecných funkcí 4 proměných jsou rovněž funkcemi souřadnic. To umožňuje postihnout nové efekty, především to umožňuje popisovat gravitační pole.

2.3.2 Pohyb volné částice

Na pohyb volné částice působí jen gravitační síly. V LIS (souřadnice ξ^{α}) platí pro pohyb (světočáru $\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(\tau)$) rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\xi^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$

V LIS se částice dle principu ekvivalence pohybuje rovnoměrně přímočaře. Souřadnice v LIS vyjádříme pomocí obecných souřadnic x^{μ}:

$$\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(x^{\mu}); \qquad \mathrm{d}\xi^{\alpha} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\,\mathrm{d}x^{\mu}.$$

Prostoročasový 4-interval jest

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\xi^{\alpha}\,\mathrm{d}\xi^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\,\mathrm{d}x^{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu} = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu}.$$

Složky metrického tenzoru (kovariantní tenzor 2. řádu)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}$$

obsahují informace o gravitačním poli. Na tento tenzor můžeme pohlížet jako na matici 4×4. Existuje i inverzní matice (kontravariantí tenzor 2. řádu) $g^{\mu\nu}$ a platí

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\kappa} = \delta^{\mu}_{\kappa}.$$

Pohybouvou rovnici částice upravíme následujícím způsobem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}\right) \quad = \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

[1] Existují „singulární“ vyjímky odstranitelné přechodem k jinému souřadnému systému.

[2] = diferencovatelnost až do mrtě.

[3] Skaláry jsou tenzory nultého řádu, vektory jsou tenzory řádu prvního.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\\
&\quad + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\\
&= 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha} \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Víme, že platí

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\mu} = \delta^\rho_\mu,$$

pak (2.1) je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\tau}\right) + \frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \qquad (2.2)$$

Známe 4-rychlost jako $U^\rho = \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\tau}$ přepíšeme (2.2) pak zavedeme označení **Christofelovy symboly**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(U^\rho\right) + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0; \quad \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}$$

Vyjádříme $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ pomocí metrického tenzoru

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \equiv g_{\mu\nu,\rho} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\rho}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\nu\partial x^\rho}.$$

Je zřemé, že $\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho}$, pak platí:

$$\begin{aligned}
\left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right) &= 2\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\sigma}\\
&= 2\Gamma^\epsilon{}_{\mu\nu}g_{\epsilon\sigma} \quad \Big| \cdot g^{\rho\sigma}
\end{aligned}$$

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(-g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu}\right)$$

2.3.3 Pohybová rovnice v Newtonovském přiblížení

Gravitační pole statické a slabé, blízké vlastnostem inerciálních systémů ve STR. Metrický tenzor pak můžeme rozepsat jako

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

kde $h_{\mu\nu}$ je malé ve sovnání s $\eta_{\mu\nu}$. Platí $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ pak

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}.$$

Pohyb částic v tomto přiblížení je pomalý $U^i = u^i$ ($\vec{u}$ je 3-rychlost) $U^0 = c$. Pohybová rovnice (pro $\rho = i$) pak dává:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}U^i + \Gamma^i{}_{00}\left(U^0\right)^2 = 0.$$

Pro malé rychlosti je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \doteq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, takže

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} + c^2\Gamma^i{}_{00} = 0$$

Christofelův symbol ($\frac{\partial}{\partial t}g_{\mu\nu} = 0$, statické pole) je

$$\begin{aligned}
\Gamma^i{}_{00} &= \frac{1}{2}g^{i\sigma}\left(-g_{00,\sigma} + g_{0\sigma,0} + g_{\sigma 0,0}\right) = \frac{1}{2}g^{i\sigma}\left(-h_{00,\sigma}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\eta^{ij}h_{00,j}
\end{aligned}$$

Tedy $\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\eta^{ij}c^2h_{00,j}$. Jelikož η^{ij} je nelulová a rovná jedné jen pro $i = j = 1, 2, 3$ platí ve vektorovém zápisu

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \text{grad}\left(\frac{1}{2}c^2h_{00}\right).$$

Dle Newtonovské mechaniky to je pohybová rovnice částice v gravitačním poli daném potenciálem

$$\Phi = -\frac{1}{2}c^2h_{00}.$$

Pro slabé statické gravitační pole je proto složka g_{00} metrického tenzoru dána potenciálem gravitačního pole:

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right),$$

g_{00} určuje rychlost chodu stojících hodin (x^i =konst.)

$$-c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}s^2 = g_{00}(c\,\mathrm{d}t)^2.$$

Kapitola 3

Zakřivené prostory

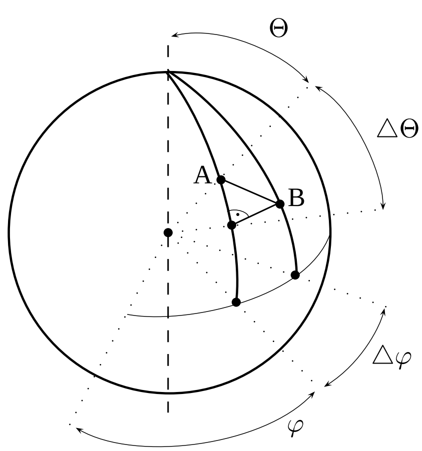
Souvislosti gravitace a geometrických vlastností prostoročasu. V délkovém elementu

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$$

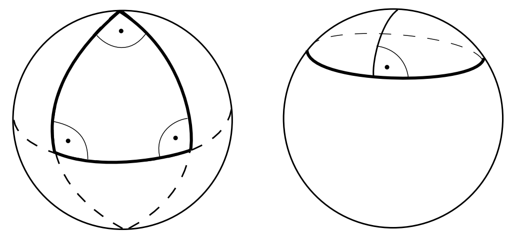
$g_{\alpha\beta}$ určuje geometrii prostotočasu a x^α, x^β jsou obecné souřadnice. Tento formalismus lze použít v plochém prostoročasu, ale i v zakřivených prostoročasech. Gravitační pole odpovídá zakřiveným prostoročasům. Vlastnosti prostoročasu v tomto případě nejsou stejné jako v STR. Pro názornost použijeme 2-dim. analogie

$$\mathrm{d}l^2 = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$$

V rovině lze zavést křivočaré souřadnice (polární), geometrické vlastnosti roviny se tím nemění. Výraz pro element intervalu leze užít i pro měření vzdáleností na povrchu koule $\mathrm{d}l^2 = r^2\,\mathrm{d}\theta + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi$.



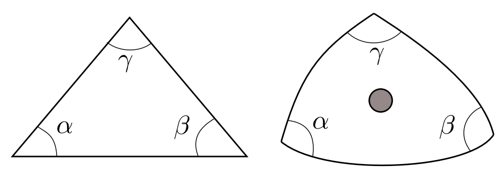
STR používa Minkovského (plochý) prostoročas - lze zavést kartézské souřadnice a globální inerciální systém. Ideální hodiny jdou všude stejně a platí $O = 2\pi r, \alpha + \beta + \gamma = 180^o$. Ovšem v gravitačním poli globální IS neexistuje, hodiny jdou různou rychlostí a geometrie prostoročasu není Minkovského. Měření? Tuhá tělěsa (absolutně) neexistují (ani v STR)



součet úhlů $> 180^o$ obvod kružnice $< 2\pi r$

Konstrukce trojůhelníků pomocí světelných paprsků Geometrie zakřiveného prostoročasu popisujeme pomocí $g_{\mu\nu}$ Metrický tenzor popisuje i gravitační pole (to je tedy ekvivalentní zakřivení prostoročasu). Kličem je univerzálnost (princip ekvivalence) gravitačního působení. Gravitační pole působí na všechno stejně, pohyb je řízen zakřivenou geometrií prostoročasu. Lokálně lze zakřivení zanedbat - plocha splývá s rovinou - lokálně lze zavést kartézské souřadnice.

STR-plochý prostoročas OTR-gravitační pole



$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$ $\alpha + \beta + \gamma > 180^o$

V gravitačním poli existuje v každém bodě LIS - lze užít kartézské souřadnice a zakřivení prostoročasu zanedbat. Globálně kartézské souřadnice nelze zavést, analogicky neexistuje globální STR. V OTR se pro popis gravitačního pole používá formální aparát popisující geometrii zakřivených ploch. Tento aparát budeme aplikovat názorně na příkladu 2-dim. zakřivených ploch. Zajímá nás vnitřní geometrie. Nezajímá nás „vnější“ (globální) geometrie - nezajímá nás vnoření této zakřivené plochy do prostoru s vyžší dimenzí. Například vnitřní geometrie válce je ekvivalentí rovině - lze na něm zavést síť kartézských souřadnic. Líší se ovšem od roviny globálními topologickými vlastnostmi. Globálními topologickými vlastnostmi se zde nebudeme zabývat.

Skutečně (vnitřně) zakřivenou plochou je například kulová plocha. Stínové bytosti, žijící jen na 2-dim ploše, vnímají jen vnitřní geometrii. Z představy 2-dim kulové plochy neplyne, že by tato plocha musela být vnořena do 3-dim prostoru; může existovat sama o sobě.[1] V OTR představa zakřiveného prostoročasu neimplikuje existenci „vícerozměrného vesmíru“.

3.1 Metrika

Zavedené označení je pro prostoročas $\mu = 1, 2, 3, 4$ a pro 2-dim plochu $\alpha = 1, 2$. Diferenciální geometrie - lokální geometrické vlastnosti. Vzdálenost dvou blízkých bodů je určena

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu,$$

kde $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\sigma)$ tenzor 2. řádu je funkcí souřadnic x^σ. Vzhledem k symetrii

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

existuje jen 10 nezávislých složek metrického tenzoru. V každém bodě prostoročasu existuje jeden směr $\mathrm{d}x^\alpha$ kdy $\mathrm{d}s^2 < 0$ a tři směry $\mathrm{d}x^\alpha$ kdy $\mathrm{d}s^2 > 0$. Časová souřadnice je x^0 a $x^i (i = 1, 2, 3)$ jsou souřadnice prostorové. Pak pro

$$\mathrm{d}x^\alpha = \delta^\alpha_0\,\mathrm{d}x^0 = (\mathrm{d}x^0, 0, 0, 0) \quad \text{je} \quad \mathrm{d}s^2 < 0$$
$$(0, \mathrm{d}x^1, 0, 0), (0, 0, \mathrm{d}x^2, 0), (0, 0, 0, \mathrm{d}x^3) je\,\mathrm{d}s^2 > 0. \tag{3.1}$$

Při transformaci do LIS je metrický tenzor přetransformován na Minkovského tenzor $\eta_{\mu\nu}$. Metriký tenzor se při změně souřadného systému transformuje jako každý jiný tenzor 2. řádu, to jest

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}.$$

Metrický tenzor se v našich lesích vyskytuje jako $g_{\mu\nu}$ kovariantní a $g^{\mu\nu}$ kontravariantní. Platí vztah

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$$

Pomocí metrického tenzoru zvedáme a snižujeme indexy u vektorů a tenzorů

$$A^\mu = g^{\mu\sigma} A_\sigma; \quad \text{a} \quad A_\beta = g_{\beta\alpha} A^\alpha$$

Smíšenými složkami metrického tenzoru jsou δ^μ_σ, neboť $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$. Při transformaci souřadnic $x'^\mu = x'^\mu(x^\alpha)$ platí transformační relace pro skalár

$$a = a',$$

pro kontravariantní a kovariantní vektor

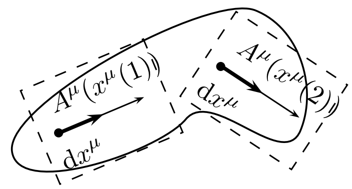
$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad \text{a} \quad A'_\mu = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} A_\sigma,$$

a pro obecný tenzor

$$T'^{\mu\nu\ldots}{}_{\rho\sigma\ldots} = \frac{\partial x'^\mu}{x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \cdots \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\sigma} \cdots T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}.$$

[1] A o možnostech vložení se dozvíte více v předmětu Geometrie - Nashova věta o vložení

V OTR jsou skaláry, vektory a tenzory funkcemi souřadnic, tj. funkcemi polohy. Jde tedy o pole skalární, vektorové a tenzorové. Také transformační matice $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}$ jsou obecně funkce polohy, takže v různých místech prostoročasu se vektory a tenzory transformují různě. (Vyjímkou jsou skaláry.) Proto nelze sečíst dva 4-vektory v různých bodech, ale skaláry ano.



Jak je zřejmé z obrázku, jedná se zde o dvě různé tečné roviny - nemá smysl sčítat vektory dvou různých rovin.

$$\mathrm{d}x'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}\,\mathrm{d}x^\alpha$$

Tenzory lze sčítat, stejného typu i násobit a úžit. Například $g_{\alpha\beta} = A^\alpha B^\beta = A^\alpha B_\beta$ je skalární součin dvou vektorů.

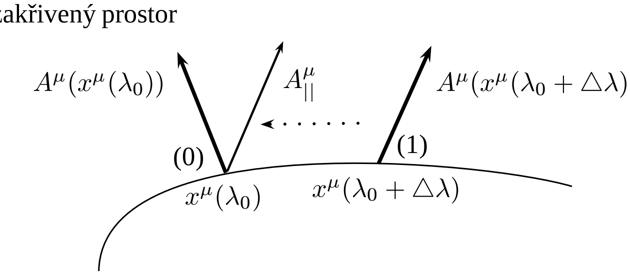
3.2 Paralelní přenos a derivace tenzorů

Mějme dánu křivku (světočáru) v parametrickém vyjádření $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, kde λ je parametr podél světočáry (například vlastní čas). Podél této křivky vektorové pole $A^\mu(x^\alpha(\lambda))$. Chceme zjistit, jak se A^μ mění podél křivky, určit rychlost této změny. (Tj. derivaci A^μ podél λ.) Obyčejná definice derivace

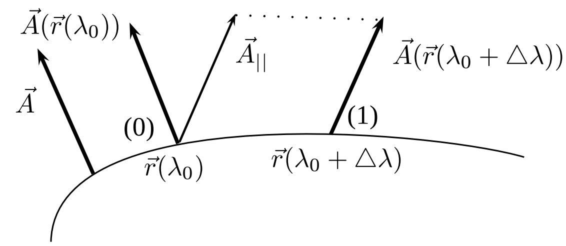
$$\left.\frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda_0} = \lim_{\triangle\lambda\to 0} \frac{A^\mu\left(x^\alpha(\lambda_0 + \triangle\lambda)\right) - A^\mu\left(x^\alpha(\lambda_0)\right)}{\triangle\lambda}$$

je zde nevhodná. Vektory v různých bodech nemůžeme odečítat. Obyčejná derivace 4-vektoru není 4-vektorem - nemá invariantí geometrický význam (závisí na souřadnicích). Definici je nutno stanovit tak, aby derivace byla 4-vektorem. Vektory je nutno odečítat v témže bodě.

zakřivený prostor

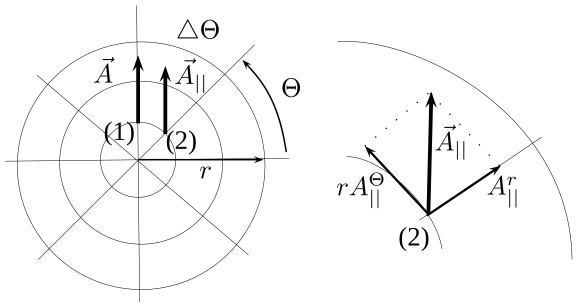


3 dim. euklidovský prostor



Inspirací nám bude paralelní přenos v rovině vyjádřený v křivočarých souřadnicích. V bodě (1) $\vec{A} = (A^r, 0)$ v bodě (2) ($\triangle\theta$ velmi malé):

$$\begin{aligned}\vec{A}_{||} &= \left(A^r \cos\triangle\theta; \frac{1}{r} A^r \sin\triangle\theta\right) \doteq \left(A^r; \frac{1}{r} A^r \triangle\theta\right) \\ &\doteq \vec{A} + \left(A^r; \frac{1}{r} A^r \triangle\theta\right)\end{aligned}$$



Definujeme paralerní přenos kontravariantního vektoru A^μ ($x^\mu \to x^\mu + \triangle x^\mu$)

$$A^\mu_{||}(x^\alpha + \triangle x^\alpha) = A^\mu(x^\alpha) - \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} A^\rho(x^\alpha) \triangle x^\sigma \quad (\triangle x^\sigma \to 0),$$

kde $\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}$ jsou koeficienty afiní konexe (obecně funkce souřadnic). Definujeme absolutní derivaci $\frac{\mathrm{D}A^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ v bodě $x^\mu(\lambda_0)$:

$$\frac{\mathrm{D}A^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \lim_{\triangle\lambda \to 0} \frac{A^\mu_{||}(\lambda_0 + \triangle\lambda) - A^\mu(\lambda_0)}{\triangle\lambda}.$$

Takto definovaná absolutní derivace je opět 4-vektor. Použijeme-li definici paralelního přenosu a $\triangle x^\sigma = -\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} \triangle\lambda$ (minus, neboť A^μ posunujeme zpět)

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{D}A^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda_0} &= \lim_{\triangle\lambda \to 0} \frac{A^\mu\left(x^\alpha(\lambda_0 + \triangle\lambda)\right) - A^\mu\left(x^\alpha(\lambda_0)\right)}{\triangle\lambda} \\ &\quad + \lim_{x^\lambda \to x^\alpha(\lambda_0)} \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}(x^\alpha) A^\rho(x^\alpha) \left.\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{x^\alpha} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda_0} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\left(x^\alpha(\lambda_0)\right) A^\rho\left(x^\alpha(\lambda_0)\right) \left.\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda_0}.\end{aligned}$$

Zkráceně

$$\frac{\mathrm{D}A^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}.$$

Je-li vektor A^μ sám paralelně přenášen

$$\frac{\mathrm{D}A^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

Je-li vektor A^μ definován v celém prostoru (nebo okolí $x^\alpha(\lambda)$) pak

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A^\mu}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} \equiv A^\mu{}_{,\beta} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} \\ \frac{\mathrm{D}A^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} &= \left(A^\mu{}_{,\beta} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} A^\alpha\right) \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}. \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Aby toho nebylo málo, zavedeme ještě kovariantí derivaci

$$A^\mu{}_{;\beta} \equiv A^\mu{}_{,\beta} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} A^\alpha.$$

Platí pravidlo, že serivace součtu je souřet derivací. Pro derivaci součinu máme

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda}\left(A^\alpha B^\beta\right) = \frac{\mathrm{D}A^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} B^\beta + A^\alpha \frac{\mathrm{D}B^\beta}{\mathrm{d}\lambda}.$$

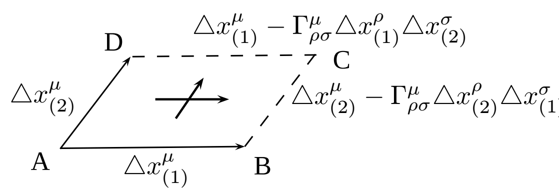
Platí, definujeme-li absolutní derivace kontravariantního tenzoru 2. řádu

$$\frac{\mathrm{D}T^{\alpha\beta}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}T^{\alpha\beta}}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} T^{\mu\beta} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^\beta{}_{\mu\rho} T^{\alpha\mu} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda}.$$

3.3 Afinní konexe

Máme dva požadavky na vlastnosti afiní konexe $\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}(x^\alpha)$

- 1. Měla by umožňovat kontrakci nekonečně malých rovnoběžníků.



Paralelně přwnwsené vertory $\triangle x_{(1)}, \triangle x_{(2)}$ se musejí „setkat“ v bodě C Má tedy platit

$$\begin{aligned}&\triangle x^\mu_{(1)} + \triangle x^\mu_{(2)} - \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} \triangle x^\rho_{(2)} \triangle x^\sigma_{(1)} \\ &= \triangle x^\mu_{(2)} + \triangle x^\mu_{(2)} + \triangle x^\mu_{(1)} - \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \triangle x^\rho_{(1)} \triangle x^\sigma_{(2)}\end{aligned}$$

Proto

$$\left(\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\rho}\right) \triangle x^\rho_{(1)} \triangle x^\sigma_{(2)} = 0 => \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\sigma\rho}.$$

Afiní konexe je symetrická. (Nebyla-li by symetrická. dostáváme prostoročas s torzí.)

- 2. Měla by zachovávat skalární součin dvou vektorů A^μ, B^μ paralelně přenášených. Zachování velikostí vektorů a úhlu mezi nimi. Víme, že pro absolutní a kovariantní derivaci skaláru platí

$$\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\lambda}; \quad a_{;\alpha} = a_{,\alpha}.$$

Jsou-li $A^\alpha_{||}, B_{||\alpha}$ paraleleně přenesené vektory A^α, B_α z bodu (0) do (1) podéle $x^\alpha(\lambda)$, pak

$$\begin{aligned}A^\alpha_{||} B_{||\alpha} &= A^\alpha B_\beta, \qquad B_{||\alpha} = B_\alpha + \triangle B_\alpha \\ A^\alpha_{||} B_{||\alpha} &= \left(A^\alpha - \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} A^\mu \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} \triangle\lambda\right)\left(B_\alpha + \triangle B_\alpha\right) \\ &\doteq A^\alpha B_\beta - \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} B_\alpha \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} \triangle\lambda A^\mu + \triangle B_\mu A^\mu.\end{aligned}$$

Proto je $\triangle B_\mu = \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} B_\alpha \triangle x^\rho$. Potom je

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}B_\mu}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}B_\mu}{\mathrm{d}\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} B^\alpha \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda}, \\ B_{\mu;\nu} &= B_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} B_\alpha. \end{aligned}$$

Obecně pro tenzory platí

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots}}{\mathrm{d}\lambda} &= T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots;\rho} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} \\ T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots;\rho} &= T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots,\rho} \\ &+ \Gamma^\alpha{}_{\kappa\rho} T^{\kappa\beta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots} + \Gamma^\beta_{\kappa\rho} T^{\alpha\kappa\ldots}{}_{\mu\nu\ldots} \\ &+ \ldots \\ &- \Gamma^\iota{}_{\mu\rho} T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\iota\nu\ldots} - \Gamma^\iota{}_{\nu\rho} T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots} \\ &- \ldots \end{aligned}$$

Přenášíme-li A^α, B^β podél $x^\alpha(\lambda)$ paralelně $\left(\frac{\mathrm{D}A^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \frac{\mathrm{D}B^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0\right)$ skalární součin $g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$ musí být podél křivky konstantí. Tedy

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda} g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta) \\ &= \frac{\mathrm{D}g_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}\alpha} A^\alpha B^\beta + g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{D}A^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} B^\beta + g_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{\mathrm{D}B^\beta}{\mathrm{d}\lambda} \\ &= g_{\alpha\beta;\rho} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} A^\alpha B^\beta. \end{aligned}$$

Platí pro libovolná A^α, B^β a libovolnou křivku, musí tedy být

$$g_{\alpha\beta;\rho} = 0, \quad \text{resp.} g^{\alpha\beta}_{;\rho} = 0,$$

lze tedy zvyšovat a snižovat indexy i u tenzoru, které jsou zderivovány. Určujeme tím ovšem i vztah mezi metrickým tenzorem a afiní konexí. Je totiž

$$g_{\alpha\beta,\rho} = \Gamma^\kappa{}_{\alpha\rho} g_{\kappa\beta} + \Gamma^\kappa{}_{\beta\rho} g_{\alpha\kappa}.$$

Využijeme symetrie afiní konexe

$$-g_{\alpha\beta,\rho} + g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\beta\rho,\alpha} = 2\Gamma^\kappa{}_{\alpha\beta} g_{\kappa\rho} \quad \Big| \cdot g^{\mu\rho}$$

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}(-g_{\alpha\beta,\rho} + g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\beta\rho,\alpha}) \tag{3.3}$$

Christofelovy symboly 2. druhu $\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\}$. Platí

$$\Gamma^\rho{}_{\alpha\rho} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{|g|}\right), \quad g = \det(g_{\alpha\beta})$$

Dále je

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|} A^\mu\right)$$

Z transformačních vlastností pro Christofelovy symboly

$$\Gamma'^\rho{}_{\iota\kappa} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\iota} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\kappa} \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\epsilon} \frac{\partial^2 x^\epsilon}{\partial x'^\iota \partial x'^\kappa}$$

je zřejmé, že $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ není tenzor. Fyzikální význam: složky $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ mohou být v některé souřadné soustavě nulové, v jiné nekteré nenulové. $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ charakterizují gravitační síly; tj. intenzitu gravitačního pole. Víme, že intenzita gravitačního pole v LIS vymizí.

3.4 Geodetiky jako „nejpřímější čáry“

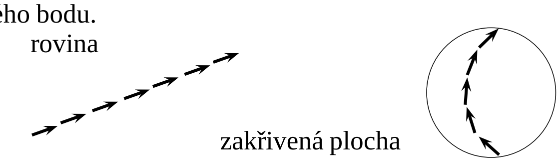
Definice: Geodetika je křivka $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, jejíž tečný vektor $\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ je podél ní přenášen paralelně (analogie s přímkou v euklidovském prostoru). Platí tedy

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right) = 0.$$

Po dosazení

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

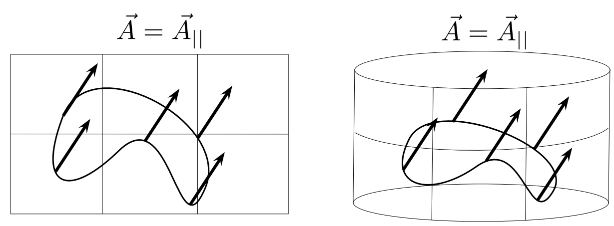
Vidíme, že z geometických představ o „nejpřímější křivce“ jsme dospěli ke stejné rovnici jako pro pohyb volného hmotného bodu.



Pro částici s $m \neq 0$ je afiní parametr ztotožnitelný s vlastním časem τ. Pro fotony ($m = 0$) nikoliv, τ nemá smysl. Geodetika je též extermální spojnicí mezi dvěma body A, B. (Nejde vždy o nejkratší spojnici, může být i nejdelší.)

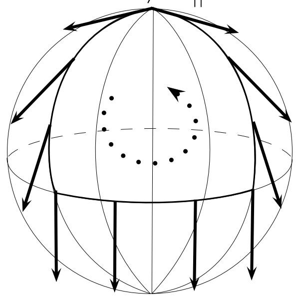
3.5 Křivost

Paralelní přenos lze definovat jen podél křivky. Rozšíčit paralelismus na celý prostor není možné. Vyjdeme-li z daného bodu (0), v němž je dán vektor $A^\mu 0$ a budeme jej do bodu (1) přenášet podél různých křivek, dostaneme různé výsledky. Nelze říct, který z těchto vektorů $A^\mu_{||}$ je ten správný. Podobně, přeneseme-li vektor A^μ podél uzavřené křivky do výchozího bodu, dostaneme obecě jiný vektor $A^\mu_{||}$. Uvedená vlastnost paralelního přenosu umožňuje definovat zakřivení prostoročasu (prostoru).



Euklidovské geometrie: svinutí plochy do válce nevadí, přenos paralelně dává stále stejné výsledky.

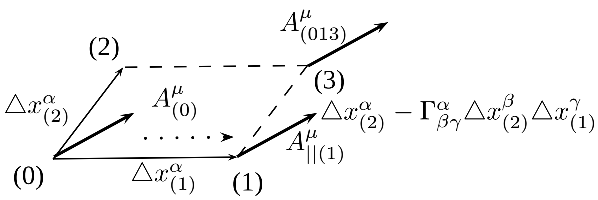
Kulová plocha: v zakřiveném prostoru nelze zavést globální kartézské souřadnice. Paralelní přenos (po uzavřené křivce) umožňuje kvalitativě vyjádřit míru a charakter zakřivení. Uvažujme křivky $(0)(1)(3)$ a $(0)(2)(3)$ tvořící 4-úhelník. Strany 4-úhelníku jsou malé vektory (vystihujeme lokální vlastnosti geometrie). Zanedbáme-li veličiny vyžších řádů. Vektory jsou úměrny veličině ϵ, zanedbáváme veličiny řádu ϵ^2 a výše. Paralelní přenos vektoru $A^{\mu}_{(0)}$ z (0) do (1) dává:



$$A^{\mu}_{||(1)} = A^{\mu}_{(0)} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}(x^{\alpha}_{(1)}) A^{\rho}_{(0)} \triangle x^{\sigma}_{(1)}.$$

Dále přenesem tento vektor do bodu (3):

$$A^{\mu}_{||(013)} = A^{\mu}_{||(1)} - \Gamma^{\mu}{}_{\iota\kappa}(x^{\alpha}_{(0)} \triangle x^{\alpha}_{(1)}) A^{\iota}_{||(1)} \cdot \\ \cdot \left(\triangle x^{\kappa}_{(2)} - \Gamma^{\kappa}{}_{\beta\gamma}(x^{\alpha}_{(0)}) \triangle x^{\beta}_{(2)} \triangle^{\gamma}_{(1)} \right).$$



Je

$$\Gamma^{\mu}{}_{\iota\kappa}(x^{\alpha}_{(0)} + \triangle x^{\alpha}_{(1)}) = \Gamma^{\mu}{}_{\iota\kappa}(x^{\alpha}_{(0)}) + \Gamma^{\mu}{}_{\iota\kappa,\alpha} \triangle x^{\alpha}_{(1)}.$$

Po dosazení a zanedbání členů vyžších řádů bude

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{||(013)} \quad = \quad & A^{\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma} A^{\rho} \triangle x^{\sigma}_{(1)} - \Gamma^{\mu}{}_{\iota\kappa} A^{\iota} \triangle x^{\kappa}_{(2)} \\ & - \Gamma^{\mu}{}_{\iota\kappa,\delta} A^{\iota} \triangle x^{\kappa}_{(2)} \triangle x^{\delta}_{(1)} \\ & + \Gamma^{\mu}{}_{\iota\kappa} \Gamma^{\iota}_{\rho\sigma} A^{\rho} \triangle x^{\sigma}_{(1)} \triangle x^{\kappa}_{(2)} \\ & + \Gamma^{\mu}{}_{\iota\kappa} \Gamma^{\kappa}{}_{\beta\gamma} A^{\iota} \triangle x^{\beta}_{(2)} \triangle x^{\gamma}_{(1)}. \end{aligned}$$

Hodnoty $A^{\mu}, \Gamma^{\mu}{}_{\iota\kappa}$ bereme v bodě (0). Paralelním přenosem $A^{\mu}_{(0)}$ do bodu (2) a poté do (3) dostaneme

$$A^{\mu}_{||(023)} = A^{\mu}_{||(013)} (\triangle x^{\alpha}_{(1)} \leftrightarrow \triangle x^{\alpha}_{(2)}).$$

Křivost prostoru vystihuje rozdíl vektorů, jenž byly přenášeny po různých stranách 4-úhelníku

$$A^{\mu}_{||(023)} - A^{\mu}_{||(013)} = \left[\Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\rho}{}_{\beta\delta} \Gamma^{\mu}{}_{\rho\gamma} \right. \\ \left. - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\gamma} \Gamma^{\mu}{}_{\rho\delta} \right] A^{\beta} \triangle x^{\gamma}_{(1)} \triangle x^{\gamma}_{(2)}.$$

Rozdíl přenesených vektorů závisí na zvoleném vektoru A^{β} a ne na vektorech $\triangle x^{\gamma}_{(1)}, \triangle x^{\gamma}_{(2)}$. Vliv křivosti prostoru charakterizuje výraz v hranaté závorce :

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\rho}{}_{\beta\delta} \Gamma^{\mu}{}_{\rho\gamma} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\gamma} \Gamma^{\mu}{}_{\rho\delta},$$

takzvaný Riemanův tenzor (tenzor 4.řádu). Pak

$$A^{\alpha}_{||(023)} - A^{\alpha}_{||(013)} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} A^{\beta} \triangle x^{\gamma}_{(1)} \triangle x^{\delta}_{(2)}.$$

Platí-li

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}\lambda} \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{D}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial v},$$

pak definice kovariantních derivací 4-vektorů (tenzorů) lze odvodit, že

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda} \left[\frac{\mathrm{D}}{\partial v} A^{\alpha} \right] - \frac{\mathrm{D}}{\partial v} \left[\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda} A^{\alpha} \right] &= -R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma} A^{\mu} \frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^{\delta}}{\mathrm{d}v} \\ A^{\alpha}{}_{;\beta\gamma} - A^{\alpha}{}_{;\gamma\beta} &= -R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma} A^{\mu} \end{aligned}$$

Z poslední rovnice je zřejmé, že $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\gamma}$ je tenzorem 4. řádu. Riemanův tenzor invariantním způsobem charakterizuje křivost zakřivených prostorů. V plochém prostoru (v němž lze zavést kartézský systém souřadnic) je v každém bodě $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = 0$. V karézských souřadnicích jsou $g_{\mu\nu}$ konstanty ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), takže $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0$ a z definice tenzoru křivosti pak plyne $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = 0$. Rovnoběžnost vektorů pak lze definovat v celém prostoru nezávisle na zvolené křivce - hovoříme o inegrabilitě paralelního přenosu.

Symetrie Riemanova tenzoru Vypíšeme je pro kovariantí složky Riemanova tenzoru

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{3.4}$$

$$R_{\alpha(\beta\gamma\delta)_{\mathrm{cykl}}} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0. \tag{3.5}$$

Úžení Riemanova tenzoru:

Ricciho skalár:	$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$
Skalár křivosti:	$R = R^{\alpha}{}_{\alpha}$
Einsteinův tenzor:	$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$

Platí důležité vztahy

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}, \quad G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha} \quad \text{a} \quad G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

Bianchiho identity:

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma;\nu} + R_{\alpha\delta\nu\beta;\gamma} + R_{\alpha\delta\gamma\nu;\beta} = 0.$$

Kapitola 4

Gravitace a geometrie zakřivného prostoročasu

Gravitační pole je v OTR popisováno zakřiveným prostoročasem. Souvislost mezi veličinami charakterizujícími gravitační pole a zakřivený prostoročas je následující. Metrický tenzor $g_{\mu\nu}$ - potenciály gravitačního pole ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \Rightarrow 10$ nezávislých složek, potenciálů). Afiní konexe $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ (kombinace pariciálních derivací $g_{\mu\nu}$) - intenzita gravitačního pole (40 nezávislých složek). Riemanův tenzor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ - rozdíly intenzity v blízkých bodech - slapové síly gravitačního pole.

4.1 Fyzikální zákony v zakřiveném prostoročasu

Nejpřirozenějšími pozorovateli v OTR jsou ti, kteří lokálně nepociťují účinky gravitačního pole - volně padající pozorovatelé. Fyzikální procesy popisuje takový pozorovatel v LIS se souřadnicemi ξ^{α}. Zajímají nás měření (měřicími tyčemi a ideálními hodinami) v okamžiku, kdy stojí vůči globální souřadné soustavě x^{μ}. Čas měřeny ideálními hodinami v počátečním LIS označíme τ.

$$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}\xi^0)^2 + (\mathrm{d}\xi^1)^2 + (\mathrm{d}\xi^2)^2 + (\mathrm{d}\xi^3)^2 = -c^2\,\mathrm{d}\tau^2$$

Pro stojící hodiny je $\mathrm{d}\xi^1 = \mathrm{d}\xi^2 = \mathrm{d}\xi^3 = 0$. 4-interval je invariant, stejný ve všech souřadných systémech:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu}.$$

(Jelikož počátek LIS stojí, dá se předpokládat $\mathrm{d}s^2 = g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2$.) Tedy

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\,\mathrm{d}x^0$$

- rychlost chodu hodin vzhledem k souřadnicím času x^0.

$$x^0 = ct \Rightarrow \mathrm{d}\tau = \sqrt{-g_{00}}\,\mathrm{d}t$$

Tímto je dán fyzikální význam g_{00} - určuje chod hodin v gravitačním poli.

4.2 Prostorové intervaly

$$\mathrm{d}l^2 = (\mathrm{d}\xi^1)^2 + (\mathrm{d}\xi^2)^2 + (\mathrm{d}\xi^3)^2$$

Při vyjádření $\mathrm{d}l^2$ pomocí x^{μ} je sitace obecně komplikovaná tím, že v transformačních vztazích vystupuje i x^0; co je současné vůči LIS, nemusí být současné z hlediska x^0. Obecně nelze položit $\mathrm{d}x^0 = 0$; člen nemusím brát v úvahu v případě, kdy $g_{0i} = 0$. Je-li $g_{0i} = 0$, pak z $\mathrm{d}\xi^0 = 0 \Rightarrow \mathrm{d}x^0 = 0 \Rightarrow \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}l^2$ takže

$$\mathrm{d}l^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$

- určuje ovlivnění měření délky v daných souřadnicích, návod na určení g_{ij}. (Délky lze měřit pomocí hodin a světelných signálů $\triangle l = c\triangle\tau$) Geometrické vleličiny musí vystupovat ve fyzikálních zákonech, ovlivňuje všechny fyzikální procesy. Princip obecné kovarince vyžaduje, aby fyzikální zákony měly stejný tvar ve všech souřadnicových soustavách. Splňují zákony „tenzor = tenzor“. Tenzory vůči obecným transformacím souřadnic; v zákonech tedy musí vystupovat veličiny tenzorového charakteru - tj, derivace absolutní a kovariantní.

Vyjdeme z principu ekvivalence, takže základem bude tvar v LIS. LIS má systém souřadnic ξ^{α} pokrývající jisté okolí zvoleného bodu v prostoročasu (počátku LIS), v němž

$$g_{\alpha\beta}\,(\xi^{\mu} = 0) = \eta_{\alpha\beta}$$

- metrika STR. Christofelovy symboly jsou v tomto případě nulové:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\,(\xi^{\mu} = 0) = 0$$

- gravitační síly nulové. LIS neí určeno jednoznačně (např. jsou možné Lorentzovy transformace). V počátku LIS se absolutní derivace rovná obyčejné a kovariantí derivace se rovná parciální. Dle principu ekvivalence platí v LIS zákony STR (v počátku LIS). Ty se ale nezmění nahradíme-li obyčejné derivace absolutními, parciální kovariantními. Tím zákony v souladu s principem obecné kovariance automaticky získávají obecně kovariantí tvar. Přechod od STR k

OTR je formálně přechodem „od čárek ke středníkům“,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \to \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}, \eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$$

Toto jednoducé pravidlo platí jen když zákony obsahují derivace 1. řádu! Kovariantní derivace 2. řádu se neredukují v počátku LIS na parciální derivace, neboť obsahují ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta,\gamma}$, jež jsou v zakřiveném prostoru obecně nenulové. Záleží na pořadí derivování a není jasné, jaké pořadí při přechodu od STR volit. Ve fyzikálních zákonech se obecně mohou objevit členy obsahující Riemanův tenzor (v STR není). Například, když dochází k interakci vnitřní struktury částice se slapovými silami.

4.3 Základní fyzikální zákony v OTR

4-rychlost částice je definovaná analogicky STR:

$$U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}; \qquad \tau = \frac{1}{c}\sqrt{-\,\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu}.$$

Pohyb volné částice

$$\frac{\mathrm{D}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$

Podobně jako v STR je $U^\mu U_\mu = -c^2$. Pro částici s klidovou hmotností m_0 definujeme 4-rychlost

$$P^\mu = m_0 U^\mu, \quad \text{takže} \quad P^\mu P_\mu = -m_0^2 c^2.$$

Pro částici s nulovou klidovou hmotností ($m_0 = 0$) je

$$P^\mu P_\mu = 0.$$

Rovnice pro pohyb volné částice $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) = 0$ lze psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + {\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0,$$

(pro $m_0 = 0$ platí táž rovnice, ale τ není vlastní čas, nýbrž afiní parametr; pro fotony je $\mathrm{d}s^2 = 0$). Volné částice se tedy pohybují po geodetikách, tj. nejpřímějších křivkách v prostoročsu; trajektorie v 3-dimenzionálním prostoru ovšem mohou být výrazně zakřivené (např. kruhové orbity v centrálním poli). Máli částice hmotnost m_0 a náboj q, její pohybová rovnice v elektromagnetickém poli je

$$\frac{\mathrm{D}(m_0 U^\mu)}{\mathrm{d}\tau} = q{F^\mu}_\nu U^\nu;$$

${F^\mu}_\nu$ je tenzor elektromagnetického pole. Chování elektromagnetického pole je dáno Maxwellovými rovnicemi:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \mu_0 j^\mu; \qquad F_{[\alpha\beta;\gamma]_{\mathrm{cykl}}} = 0,$$

j^μ je hustota 4-proudu a $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$.

$$\begin{aligned} -A^{\alpha;\mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\alpha} &= \mu_0 j^\alpha \\ -A^{\alpha;\mu}{}_{\mu} + A^{\mu;\alpha}{}_{\mu} &= \mu_0 j^\alpha \\ -A^{\alpha,\mu}{}_{\mu} + A^{\mu}{}_{;\mu}{}^{\alpha} + R^{\alpha}{}_{\mu}A^\mu &= \mu_0 j^\alpha \\ \text{Lorentzova podmínka} \quad A^{\alpha;\mu}{}_{\mu} = 0, \quad \Box A^\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Tenzor energie-hybnosti:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \rho U^\mu U^\nu - \text{nekoherentí prach} \\ T^{\mu\nu} &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu} - \text{dokonalá kapalina} \end{aligned} \tag{4.1}$$

ρ - hustota hmotnosti (měřená v LIS, který vůči prachu, respektive kapalině, je v daném okamžiku v klidu), p - tlak (měřený stejným způsobem).

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{elmag}} = \frac{1}{\mu_0}\left[{F^\mu}_\rho F^{\nu\rho} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\left(F_{\rho\sigma F^{\rho\sigma}}\right)\right]$$

Platí důležitý zákon zachování:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

neboli

$$T^{\mu\nu}{}_{\nu} = -{\Gamma^\mu}_{\rho\nu}T^{\rho\nu} - {\Gamma^\nu}_{\rho\nu}T^{\mu\rho}. \tag{4.2}$$

Energie a hybnosti látek a polí se v OTR nezachovávají! (Kdyby se zachovávaly, musel by být v rovnici (4.2) člen na pravé straně nulový.) Například pro $\mu = 0$ plyne

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial t} = \mathrm{div}\vec{\mathcal{S}} \neq 0,$$

kde ϵ je hustota energie, $\vec{\mathcal{S}}$ hustota toku energie. Po integrování přes konečnou oblast - přírustek energie v dané oblasti se obecně nerovná množství energie, jež do ní vproudilo. Tento výsledek je dán skutečností, že $T^{\mu\nu}$ nezahrnuje energii a hybnost gravitačního pole. Přitom například systém částic roste na úkor energie gravitační.

4.4 Einsteinův gravitační zákon

Geometrie prostoročasu ovlivňuje chování hmoty. Hmota naopak určuje chování prostoročasu , jeho zakřivení. Vliv hmoty na geometrii je dán gravitačním zákonem. Při „odvození“ gravitačního zákona v OTR nelze použít princip ekvivalence a vyjít z LIS - v STR gravitační zákon neexistuje. Spíše než o odvození půjde o postulování; uhádnutí gravitačního zákona na základě teoretických úvah. V klasické mechanice platí Newtonův gravitační zákon, který je pro slabá a pomalu se měnící pole v dobrém souladu s pozorováním . Hledejme v něm proto inspiraci. Newtonův gravitční zákon pro potenciál Φ má tvar

$$\triangle\Phi = 4\pi G\rho. \tag{4.3}$$

Na levé straně jsou druhé derivace potenciálu, na pravé je střední hustota hmotnosti. V OTR je gravitační pole popsáno hned deseti potenciály $g_{\mu\nu}$. Pro slabé stacionární pole, kdy je $g_{00} \doteq -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$ musí OTR splývat s newtonovskou teorií. Je tedy přirozené předpokládat, že na levé straně gravitačního zákona budou derivace potenciálů $g_{\mu\nu}$. Dle principu obecné kovariance musí mít gravitační zákon týž tvar ve všech souřadných soustavách, tj. musí mít tenzorový tvar. Použijeme princip jednoduchosti: druhé derivace $g_{\mu\nu}$ by měly vystupovat jen lineárně. Tedy levá strana gravitačního zákona musí obsahovat $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}, g_{\mu\nu}$ a jejich kombinace, tj. $R_{\alpha\beta}, R, Rg_{\mu\nu}$. Nikoliv $R^2, RR_{\alpha\beta}$, neboť pak již obsahuje druhé derivace $g_{\alpha\beta}$ kvadraticky. Na pravé straně Newtonova zákona je hustota hmotnosti (energie). V OTR by měla pravá strana být tenzorem a obsahovat hustotu energie. Ta je ovšem složkou tenzoru energie-hybnosti. Prot je vhodné hledat gravitační zákon ve tvaru

$$\left(\text{tenzor obsahující} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}, g_{\mu\nu}\right)_{\mu\nu} = k \cdot T_{\mu\nu}.$$

Levá strana - tenzor 2. řádu $\Rightarrow$ může obsahovat $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, Rg_{\mu\nu}$. Vzhledem k tomu, že pro tenzor energie-hybnosti platí „zákon zachování“ $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, musí také levá strana gravitačního zákona splňovat analogickou podmínku:

$$(\text{levá strana})^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

Kombinace $R_{\alpha\beta}, R, g_{\alpha\beta}$ splňující tuto podmínku je Einsteinův tenzor:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

Gravitační zákon by tedy měl mít tvar

$$G_{\mu\nu} = k \cdot T_{\mu\nu}.$$

Tento zákon svazuje geometrii prostoročasu (levá strana) s rozložením hmoty (zdrojový člen na pravé straně). Einsteinův gravitační zákon lze upravit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= kT_{\mu\nu} \quad \big| g^{\mu\nu} \\ R - \frac{1}{2} R \cdot 4 &= kT^{\alpha}{}_{\alpha};\ T^{\alpha} = T - \text{stopa} \\ R &= -kT. \end{aligned}$$

Tedy

$$R_{\mu\nu} = k \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right).$$

Konstantu k určíme z principu korenspondence (pro slabá stacionární pole). Einsteinův gravitační zákon přechází na Newtonův gravitační zákon. Máme $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$; kde $h_{\mu\nu} \sim \epsilon, |\epsilon| << 1$; členy $\sim \epsilon^2, \sim \epsilon^3$ zanedbáváme. Jelikož $h_{\mu\nu} \sim \epsilon$ pak i $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \sim \epsilon$ a v $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ zanedbáváme členy $\Gamma\Gamma$. Z tohoto plyne

$$R_{\mu\nu} \doteq \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho,\nu}.$$

Vyšetřeme složku R_{00}; za předpokladu stacionarity (derivace dle x^0 rovny nule) bude

$$R_{00} \doteq \Gamma^{\rho}{}_{00,\rho} = \Gamma^{i}{}_{00,i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left[-g^{ij} \frac{1}{2} g_{00,ij} \right].$$

Jelikož $g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$, bude

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \eta^{ij} \Phi_{ij} = \frac{1}{c^2} \triangle \Phi.$$

Pravá strana pro nekoherentí prach $T_{\mu\nu} = \rho U_{\mu} U_{\nu}$, což dáva $T = -\rho c^2$ vede ve stacionárním případě s $U_0 \doteq -c, T_{00} \doteq c^2 \rho$ k výrazu

$$T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \doteq T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T \doteq \frac{1}{2} c^2 \rho.$$

Dostáváme tedy $\triangle \Phi = \frac{k}{2} c^4 \rho$; srovnáním s Newtonovým gravitačním zákonem (4.3) vychází $k = 8\pi \frac{G}{c^4}$, takže Einsteinův gravitační zákon má tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Připojíme-li takzavaný kosmologický člen $\Lambda g_{\mu\nu}$ (Λ je kosmologická konstanta), má Einsteinův gravitační zákon tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Jelikož $g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, platí stále $(\text{levá strana})^{\mu\nu}{}_{\nu} = 0$. Pro slabé stacionární pole však dostáváme

$$\triangle \Phi + 2\Lambda \Phi = 4\pi G \rho - \Lambda c^2$$

(Newtonův g.z. dostáváme jen když $\Lambda = 0$). Pro velmi malá Λ by však odchylky od Newtonova zákona v rámci sluneční soustavy mohly být pod hranicí dnešních pozorovacích chyb. Odchylky se ovšem budou vždy projevovat na velkých vzdálenostech. Například v prázdném prostoru ($\rho = 0$) je řešením Newtonova g.z. při $\Lambda = 0$ potenciál $\Phi \sim \frac{1}{r}$, zatímco při $\Lambda \neq 0$ je to $\Phi \sim \frac{1}{r} e^{-\sqrt{2\Lambda} r}$. Odtud název kosmologická konstanta. Einstein $\Lambda g_{\mu\nu}$ zavedl, aby zajistil statičnost jistého kosmologického řešení. Tento argument poměrně rychle padl. Λ lze chápat jako pole, jež působí na vše (prostřednictvím zakřivení prostoročasu) a na něž samotné nepůsobí nic. Neexistují experimentální důkazy $\Lambda \neq 0$. Nicméně lze ukázat, že kosmologická konstanta odpovídá hustotě energie vakua a hraje klíčovou roli v dnešních kosmologických modelech.

Einsteinovy rovnice jsou nelineární! To komplikuje řešení Einsteinových rovnic. (Příčinou jsou součiny Christoffelových symbolů v Riemanově tenzoru.) Neplatí princip superpozice. Gravitační pole dvou těles není dáno součtem (superpozicí) pole jednotlivých těles. Gravitační pole je rovno rozložení energie (a hybnosti). Samo však má energii, zpětně se ovlivňuje „budí samo sebe“. Celkové gravitační pole dvou těles je slabší než součet polí samostatných těles. Dochází ke gravitačnímu úbytku hmotnosti danému gravitační vazebnou energií (která je záporná).

4.5 Sféricky symetrické gravitační pole

Důsledky OTR lze ověřovat na základě srovnání předpovědí teorie s pozorováním. Proto ovšem musíme hledat řešení Einsteinových rovnic. Pro testování OTR v rámci sluneční soustavy tedy musíme napřed určit gravitační pole buzené sluncem, tj. řešit Einsteinovy rovnice, když zdrojový člen je dán rozložením ...??? (a jeho okolí). Vliv meziplanetárního prostředí, detaily stavby Slunce a jeho rotaci lze zanedbat - v dalšich přiblíženích je lze charakterizovat pomocí malých perturbací. Musíme tedy hledat gravitační pole buzené sféricky symetrickým tělesem ve vakuu. Takové pole zjevně bude také sféricky symetrické. Při řešní problému je výhodné použít sférické souřadnice r, θ, φ. Souřadnice θ, φ mají stejný význam jako v eukleidovském prostoru. Požadavek sférické symetrie výrazně omezuje tvar metrického tenzoru. Přitom hodně daleko od tělesa bude prostoročas plochý a metrika bude mít v souřadnicích t, r, θ, φ tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right).$$

Obecná metrika má tvar (v uvedených souřadnicích)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = g_{00}\,\mathrm{d}t^2 + r_{rr}\,\mathrm{d}r^2 + g_{\theta\theta}\,\mathrm{d}\theta^2 + g_{\varphi\varphi}\,\mathrm{d}\varphi^2 \\ +2g_{0r}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r + 2g_{0\theta}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta + 2g_{0\varphi}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \\ +2g_{r\theta}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + 2g_{r\varphi}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + 2g_{\theta\varphi}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

Geometrie sféricky symetrická se nesmí měnit při záměně $\mathrm{d}\varphi \to -\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\theta \to -\mathrm{d}\theta$ při libovolných $\mathrm{d}t, \mathrm{d}r$. Odtud ihned plyne $g_{0\theta} = g_{0\varphi} = g_{r\theta} = g_{r\varphi} = 0$. Geometrie na povrchu sféry $r =$konst ($t =$konst) je stejná ve všech bodech sféry (metrika se nemění při otočení os x, y, z (kartézských) kolem počátku $r = 0$.) To je splněno pro metriku na povrchu koule v plochém prostoru a lze dokázat, že geometrie na povrchu sféry musí být ve sféricky symetrickém případě totožná s geometrií sféry v plochém prostoročasu. Lze tedy psát

$$g_{\theta\theta}\,\mathrm{d}\theta^2 + 2g_{\theta\varphi}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi + g_{\varphi\varphi}\,\mathrm{d}\varphi^2 = R^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right),$$

kde obecně je $R = R(r, t)$. $2\pi R$ je obvod libovolné hlavní kružnice na sféře. Metrika musí tedy mít tvar

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\,\mathrm{d}t^2 + 2g_{0r}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r + g_{rr}\,\mathrm{d}r^2 + R^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right),$$

kde $g_{00}, g_{0r}, g_{rr}, R$ jsou funkce r, t (a nemohou být vzhledem k e sférické symetrii funkcemi θ, ϑ). Přejděme nyní k souřadnicím $t, \tilde{r} = R(r, t)$. Radiální souřadnice tedy je obvod hlavní kružnice sféry $r =$konst, $t =$konst, dělený 2π. Metrika má pak tvar

$$\mathrm{d}s^2 = \widetilde{g_{00}}\,\mathrm{d}t^2 + 2\widetilde{g_{0r}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tilde{r} + \widetilde{g_{rr}}\,\mathrm{d}\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right),$$

Tuto metriku lze diagonalizat, tj. nalézt souřadnici $\tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{r}, t)$ takovou, že platí

$$\widetilde{g_{00}}\,\mathrm{d}t^2 + 2\widetilde{g_{0t}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tilde{r} + \widetilde{g_{rr}}\,\mathrm{d}\tilde{r}^2 = -c^2 e^{2\Phi}\,\mathrm{d}\tilde{t}^2 + e^{2\Lambda}\,\mathrm{d}\tilde{r}^2,$$

stačí volit $e^{2\Lambda} = \widetilde{g_{rr}} - \frac{\widetilde{g_{0r}}^2}{\widetilde{g_{00}}}$; $\quad ce^{\Phi}\,\mathrm{d}\tilde{t} = \sqrt{-\widetilde{g_{00}}}\,\mathrm{d}t - \frac{\widetilde{g_{0r}}}{\sqrt{-\widetilde{g_{00}}}}\,\mathrm{d}\tilde{r}$. Sféricky symetrická metrika má konečný tvar ($\tilde{t}, \tilde{r} \to t, r$):

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{2\Phi}c^2\,\mathrm{d}t^2 + e^{2\Lambda}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right).$$

Nové funkce $\Phi = \Phi(r, t), \Lambda = \Lambda(r, t)$ nemají nic společného s Newtonovským potenciálem ani s kosmologickou konstantou. Standardním výpočtem Christoffelových symbolů a Riemanova tenzoru křivosti dojdeme k Einsteinovu tenzoru a k levé straně Einsteinových rovnic. Budeme hledat vakuové řešení (vně tělesa), tj. $T_{\mu\nu} = 0$. Einsteinovy rovnice dávají $G_{\mu\nu}$; dosazením za jednotlivé složky $G_{\mu\nu}$ dostáváme soustavu rovnic ($\dot{} \equiv \frac{\partial}{\partial t}$; $' \equiv \frac{\partial}{\partial r}$):

$$e^{-2\Lambda}\left(1 - 2r\Lambda'\right) - 1 = 0 \quad (4.4)$$

$$e^{-2\Lambda}\left(1 - 2r\Phi'\right) - 1 = 0 \quad (4.5)$$

$$-\frac{r^2}{c^2}e^{-2\Phi}\left[\ddot{\Lambda} + \dot{\Lambda}^2 - \dot{\Lambda}\dot{\Phi}\right] + r^2 e^{-2\Lambda}\left[\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{1}{r}(\Phi' - \Lambda')\right] = 0 \quad (4.6)$$

$$\dot{\Lambda} = 0 \quad (4.7)$$

Na proměných θ, φ složky $G_{\mu\nu}$ nezávisí v důsledku sférické symetrie; vyjímkou je $G_{33} = \sin^2 G_{22}$ - což je ovšem dáno sférickou symetrií. Einsteinových rovnic je obecně 10 - zbývajících 6 je splněno triviálně nebo závisí na rovnicích (4.4) - (4.7). Můžeme přistoupit k řešení Einsteinových rovnic (4.4) - (4.7). Z (4.7) plyne

$$\Lambda = \Lambda(r).$$

Λ nezávisí na t. Odečtením (4.4) a (4.5) dostáváme

$$\Lambda' + \Phi' = 0.$$

Tedy $(\Lambda + \Phi)' = 0$ a odtud $\Lambda + \Phi = f(t)$, $f(t)$ je libovolná funkce. Je tedy

$$\Phi(r, t) = f(t) - \Lambda(r). \quad (4.8)$$

Rovnici (4.4) lze upravit na tvar

$$-2\Lambda' e^{-2\Lambda} = \frac{1}{r}(1 - e^{-2\Lambda})$$

a zavedením substituce $g(r) = e^{-2\Lambda(r)}$ dostáváme

$$g' = \frac{1}{r}(1 - g).$$

Tuto rovnici lze řešit separací proměných. Řešení je $g = 1 - \frac{K}{r}$, kde K je libovolná konstanta. Proto je

$$e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - \frac{K}{r}}. \quad (4.9)$$

Z rovnice (4.8) dále plyne

$$e^{2\Phi} = e^{2f(t)} - e^{-2\Lambda} = e^{2f(t)}\left(1 - \frac{K}{r}\right) \quad (4.10)$$

Řešení (4.9), (4.10) vyhovují rovnicím (4.4), (4.5),(4.7). Uvažujem ještě rovnici (4.6). Při $\dot{\Lambda} = 0$ je první člen identicky roven nule. Druhý člen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}re^{-2\Lambda}e^{-2\Phi}\left[e^{2\Phi}(1 + 2r\Phi') - 1\right]' &= \\ \frac{1}{2}re^{-(2\Lambda+2\Phi)}\left[e^{2f(t)}e^{-2\Lambda}(1 + 2r\Phi') - 1\right]' &= \\ \frac{r}{2}e^{-(2\Lambda+2\Phi)}\left[e^{2f(t)} - 1\right] &= 0,\end{aligned}$$

kde bylo využito (4.10) a (4.5). Rovnice (4.6) je tedy splněna identicky. Výraz (4.10) určující g_{00} lze zjednodušit volbou časové souřadnice $\tilde{t} = \tilde{t}(t)$, $\mathrm{d}\tilde{t} = e^{f(t)}\,\mathrm{d}t$. Pak je $\widetilde{g_{00}} = e^{-2f(t)}g_{00}$ a koeficient $e^{2f(t)}$ tím z (4.10) vypadne. Označení $\tilde{}$ opět vynecháme (budeme prostě předpokládat $f(r) = 0$). Sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic lze tedy psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\left(1 - \frac{K}{r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1 - \frac{K}{r}\right)} \\ &\quad + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Každé další sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic ve vakuu lze dostat z (4.11) transformací souřadnic. Z fyzikálního hlediska jde o totéž řešení - popisují tutéž geometrii prostoročasu, pouze užívají jiné souřadnice.

Metrika (4.11) nazávisí na čase ($g_{\mu\nu,0} = 0$). Proto ani geometrie prostoročasu nezávisí na časové souřadnici t, tj. gravitační pole (geometrie) je statické.

Birkhoffův teorém: Sféricky symetrické gravitační pole ve vakuu je nutně statické. (Použijeme-li časovou souřadnici t, odpovídající Minkowského prostoročasu v nekonečnu.) „Nevhodnou“ volbou souřadnic by bylo možno docílit, že $g_{\mu\nu}$ budou na čase záviset - to platí, vezmeme-li souřadný systém, jenž se nám s časem mění, rozpíná, pulzuje, hroutí, apod. Statičnost gravitačního pole je dána tím, že můžeme nalézt soustavu souřadnic v níž $g_{\mu\nu}$ na čase nezávisí. V obecné gravitačním poli takovou souřadnou soustavu nalézt nelze. Metrika (4.11) závisí na jediné konstantě K. Je zřejmé, že tato konstanta závisí na hmotnosti M sféricky symetrického tělesa. Při znalosti $T_{\mu\nu}$ bychom mohli řešit Einsteinovy rovnice i uvnitř tělesa a z napojení na vnější řešení určit K. To lze provést jednodušeji srovnáním s Newtonovskou teorií daleko od tělesa, kde je pole slabé. Newtonův potenciál Φ_N buzený sféricky symetrickým tělesem o hmotnosti M je $\Phi_N = -\frac{GM}{r}$. Ve sférickém stacionárním poli platí $g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi_N}{c^2}\right)$, takže

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right).$$

Zavedeme-li souřadnici $x^0 = ct$, vidím, že

$$K = \frac{2GM}{c^2} = r_g.$$

Dostáváme tedy vakuovou Schwarzchildovu metriku

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 \\ &\quad + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right). \end{aligned}$$

Gravitační poloměr tělesa je $r_g = \frac{2GM}{c^2}$.

Kapitola 5

Experimentální prověrky OTR

5.1 Alternativní teorie gravitace

Před vznikem OTR existovala například Nordströmova teorie gravitace. Po vzniku OTR bylo vytvořeno mnoho dalších teorií. Převážně většina z nich respektuje princip ekvivalence a pracuje s metrikou prostoročasu. Jde o metrické teorie, k nimž jsou dodávána přídavná pole charakterizující gravitaci (skalární, vektorová, tenzorová). Jedinou teorií obecnějšího typu je Caranova, pracující s nesymetrickou afiní konexí tj. s prostoročasem s torzí.

Uvažujme sféricky symetrické pole, o němž předpokládáme, že je slabé (například ve sluneční soustavě), tj. $\left(\frac{2GM}{c^2r}\right) << 1$. Pak je přibližně

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2\,\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\mathrm{d}r^2 \\ &\quad +r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right); \end{aligned}$$

tato metrika popisuje slabé pole v OTR. Jiné teorie gravitace dají jinou metriku, s jinými koeficienty před členy $\frac{2GM}{c^2r}$, respektive jejich odmocninami. Tyto metrické členy se projeví v rovnicích popisujících fyzikální děje a různé teorie pak předpovídají různé výsledky experimentů. Naměřené hodnoty pak umožňují vyloučit nekorektní teorie. Dosavadní výsledky experimentů jsou v souladu s OTR, ovšem i s některými dalšími metrickými teoriemi. V OTR však vystupuje jediná univerzální konstanta, Newtonowa gravitační konstanta G. Ostatní teorie obsahují navíc jeden či více volných parametrů, jejichž hodnota se určuje až z experimetů. Princip jednoduchosti (minimum parametrů v teorii) jednoznačně hovoří ve prospěch OTR. Víme, že vskutku fundamentální teorie obsahují minimální počet konstant (STR, elmag Maxwellova teorie, kvantová mechanika).

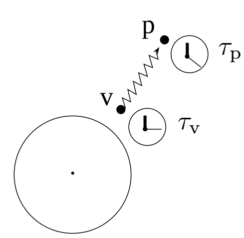
Ve sluneční sloustavě je gravitační pole velmi slabé a měřitelných efektů je poměrně málo, s rozvojem moderních technologií se škála rozšiřuje. Relativistická astrofyzika a kosmologie poskytují množství testů v silných polích. O tom ovšem později.

5.2 Gravitační rudý posuv

Připomeňme, že vztah pro gravitační rudý posuv v homogením gravitačním poli byl již dříve odvozen z principu ekvivalence. Obecně $\mathrm{d}\tau=\frac{1}{C}\sqrt{-g_{00}}\,\mathrm{d}x^0$. Pro Schwarzchildovu metriku dostáváme pro chod hodin stojících v daném místě prostoru (r,θ,φ konstantní)

$$\triangle\tau=\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2r}}\triangle t;$$

$\triangle\tau$ je přírustek času na hodinách odpovídající přírustku souřadnicového čsu $\triangle t$.



$\triangle\tau_\mathrm{v}=\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2r_\mathrm{v}}}\triangle t$ a $\triangle\tau_\mathrm{p}=\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2r_\mathrm{p}}}\triangle t$ Je proto

$$\frac{\triangle\tau_\mathrm{v}}{\triangle\tau_\mathrm{p}}=\frac{\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2r_\mathrm{v}}}}{\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2r_\mathrm{p}}}}$$

Vidíme, že v gravitačním poli dochází ke zpomalování chodu hodin (touku času). Uvažujme vysílač V, vysílající záření o fragvenci ν_v (měřeně místními hodinami) na r_v. Nechť $\triangle\tau_\mathrm{v}$ je perioda vysílaného záření: $\triangle\tau_\mathrm{v}=\frac{1}{\nu_\mathrm{v}}$. Pak $\triangle t_\mathrm{v}$ je časový interval odpovídající periodě (interval mezi dvěma hřebeny vln) $\triangle\tau_\mathrm{v}=\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2r_\mathrm{v}}}\triangle t_\mathrm{v}$. Záření je příjmáno přímačem na r_p a pro periodu měřenou místními hodinami je $\triangle\tau_\mathrm{p}=\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2r_\mathrm{p}}}\triangle t_\mathrm{p}$. Perioda $\triangle t_\mathrm{p}$ v souřadnicovém čase se nemění - čas šíření mezi vysláním a přijetím daný „metrikou“ je stále stejný, neboť pole je statické. Je tedy $\triangle t_\mathrm{p}=\triangle t_\mathrm{v}$. Jelikož $\nu_\mathrm{p}=\frac{1}{\triangle\tau_\mathrm{p}}$, dostáváme

$$\frac{\nu_\mathrm{p}}{\nu_\mathrm{v}}=\frac{\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2r_\mathrm{v}}}}{\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2r_\mathrm{p}}}}$$

Pro $r_\mathrm{p}>r_\mathrm{v}$ (záření stoupá v gravitačním poli) je $\nu_\mathrm{p}<\nu_\mathrm{v}$ - dostáváme gravitační rudý posuv. Při $r_\mathrm{p}<r_\mathrm{v}$ - gravitační modrý posuv. Pro slabé pole $\left(\frac{2GM}{c^2r}\ll 1\right)$ lze psát $\left(\sqrt{1+\epsilon}\doteq 1+\frac{\epsilon}{2}\right)$

$$\frac{\nu_\mathrm{p}}{\nu_\mathrm{v}}\doteq 1+\frac{GM}{c^2r_\mathrm{p}}-\frac{GM}{c^2r_\mathrm{v}}$$

Pro slabá gravitační pole tedy dostáváme vztah odvozený z principu ekvivalence a Newtonova gravitačního zákona. Jeho ověřování je tedy nezávislým testováním principu ekvivalence.

5.2.1 Observace

- Gravitační posuv spektrálních čar hvězd $\frac{\triangle\nu}{\nu} \sim \frac{GM}{c^2 r}$; pro Slunce: $\frac{\triangle\nu}{\nu} = 2,12 \times 10^{-6}$ Pozorované hodnoty mohou být ovlivněny Hopplerovým (?) posuvem způsobeným konvektivními proudy ve sluneční atmosféře. (Příčná rychlost $\sim 600\text{ms}^{-1}$) Přesnost měření až 5% (1902). U bílých trpaslíků $\frac{\triangle\nu}{\nu} = 10^{-4}$.
1965 - Mössbauerův jev u posuvu γ záření - spektrální čára 14???Fe (velmi úzké čáry) rozdíl ??? $\frac{\triangle\nu}{\nu} = \frac{1}{c^2} gh \cdot 2,5 \times 10^{-15}$. Přesnost 1%.
- Přímé měření zpožďování chodu hodin $\triangle h$ =10km - za 15 hodin rozdíl chodu dvou hodin ~ 50 nanosekund. Atomové hodiny umožňují měření s přesností 2% (Letadno; speciálně relativistický efekt dilatace času dává 5 nanosekund) r.1976 raketa ve výšce 160km - přesnost $0{,}04\%$.

5.3 Pohyb ve sféricky symetrickém gravitačním poli

Tento pohyb je dán geodetikami (časovými či nulovými) Schwarzchildovy geometrie. Rovnice geodetiky $\frac{DU_\mu}{d\tau} = 0$ zapíšeme ve tvaru

$$\frac{dU_\mu}{d\tau} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} U_\alpha U^\beta = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} U^\alpha U^\beta. \tag{5.1}$$

Je vidět, že nezávisí-li $g_{\alpha\beta}$ na souřadnici x^μ, $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0$ (pro všechna $\alpha, beta$ a dané μ), pak $\frac{dU_\mu}{d\tau} = 0$, U_μ =konst. Kovariantní složka 4-hybnosti se zachovává. Ve Schwarzschildově geometrii je $g_{\alpha\beta,0} = 0, g_{\alpha\beta,3} = 0$ (t, φ). Tedy

$$\begin{aligned} U_0 &= -\tilde{E}, & (5.2)\\ U_3 &= \tilde{L}. & (5.3)\end{aligned}$$

Konstanty $\tilde{E}, \tilde{L}$ představují energii a moment hybnosti (dělené klidovou hmotností) částice měřené vzdáleným pozorovatelem . Rovnice (5.1) představuje 4 rovnice, z nichž dvě ($\mu = 0, 3$) jsou řešeny rovnicemi (5.2) a (5.3). Další komponeta ($\mu = 2$) bude spočtena, budeme-li uvažovat pohyb v ekvatoriální rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$ =konst ($U^2 = 0 \Rightarrow U_2 = 0$ - lze se přesvědčit, že platí). Tím ??? nečitelne ???, aby to byla rovina ekvitoriální. Místo poslední rovnice $\frac{DU_r}{d\tau} = 0$ využijeme normalizační podmínky

$$g^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = -c^2 \quad (m_0 \neq 0) \tag{5.4}$$

(Díky (5.4) je poslední rovnice z (5.1) závislá na třech předchozích , $\frac{dU_1}{d\tau} = 0$ je splněno automaticky.) Dosadíme-li $U_2 = 0, U_0 = -\tilde{E}, U_3 = L, \tilde{g}^{\alpha\beta}$ dostáváme

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(c^2 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \tag{5.5}$$

kde $U^1 = \frac{dr}{d\tau}$. Z rovnice (5.3) plyne $g_{\beta\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \tilde{L}$, takže $r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = \tilde{L}$. Dělíme-li (5.5) výrazem $\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$ a využijeme $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{dr}{d\varphi}$, dostáváme

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = \frac{r^4}{\tilde{L}^2}\left[\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(c^2 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)\right], \tag{5.6}$$

což je rovnice trajektorie v Schwarzchildově geometrii. Zavedeme novou souřadnici $\rho = \frac{1}{r}$, takže (5.6)

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2}{\tilde{L}^2} - (1 - r_g\rho)\frac{c^2}{\tilde{L}^2} - (1 - r_g\rho)\rho^2 \tag{5.7}$$

Derivujeme dle ρ a zkrátíme $\frac{d\rho}{d\varphi}$, dostáváme [1]

$$\rho'' + \rho = \frac{c^2 r_g}{2\tilde{L}^2} + \frac{3}{2} r_g \rho^2, \tag{5.8}$$

což je Binetův vzorec v OTR. Pro částice s $m_0 = 0$ (fotony) bude $\rho'' + \rho = \frac{3}{2} r_g \rho^2$. Binetův vzorec $\left(u \equiv \rho \equiv \frac{1}{r}\right)$

$$u'' + u = \frac{c^2 r_g}{2\tilde{L}^2} + \frac{3}{2} r_g u^2. \tag{5.9}$$

Pro slabé pole je $\frac{r_g}{r} \ll 1$, a $\frac{3}{2} r_g u^2 = \frac{3}{2} u \frac{r_g}{r}$ má v Binetově formuli význam malé korekce. Člen $\frac{c^2 r_g}{2\tilde{L}^2}$ malou korekcí není; $\tilde{L} \lesssim rv$ a pro částice vázané v daném gravitačním poli je $\frac{v^2}{c^2} \approx \frac{r_g}{r}$, takže $\frac{c^2 r_g}{2\tilde{L}^2} \approx \frac{c^2 r_g}{2v^2 r^2} \approx \frac{1}{2} u$.

5.3.1 Posuv perihélia

Řešme pohyb testovacího tělesa s $m \neq 0$ ve slabém gravitačním poli. Binetova formule (5.9) dává v nulté aproximaci (bez členu $3/2 r_g u^2$) partikulární řešení $u_0 = \frac{c^2 r_g}{2\tilde{L}^2}$ a řešení homogení $u'' + u = 0$ lze psát ve tvaru $u = A\cos\varphi$ (předpokládáme $\varphi_0 = 0$); A je konstanta. Celkové řešení je (v nulté aproximaci $u_{(0)}$):

$$u_{(0)} = A\cos\varphi + u_0, \qquad r_{(0)} = \frac{1}{\frac{GM}{\tilde{L}^2} + A\cos\varphi},$$

což je rovnice kuželosečky v polárních souřadnicich[2], jde tedy o Newtonovskou aproximaci. Omezíme se na případ $|A| < \frac{GM}{\tilde{L}^2}$, kdy je trajektorií elipsa. Obecně relativistická korekce bude dána členem $\frac{3}{2} r_g u^2$. Předpokládáme-li tuto OTR korekci malou pak $u = u_{(0)} + u_{(1)}$ kde $u_{(1)} \ll u_{(0)}$.

[1] kde $' = \frac{d}{d\varphi}, m_0 \neq 0$.

[2] Kdo v tom hned nepoznal rovnici kuželosečky, ať nezoufá, já to v tom taky nevidím :-) .

Do členu $\frac{3}{2}r_{\rm g}u^2$ dosadíme pouze $u_{(0)}$ (to bude 1. řádu). Z Binetova vzorce pak pro „poruchu“ v 1. aproximaci platí:

$$u''_{(1)} + u_{(1)} = \frac{3}{2}r_{\rm g}u^2_{(0)} = \frac{3}{2}(u_0^2 + 2u_0 A\cos\varphi + A^2\cos^2\varphi). \tag{5.10}$$

Pro dráhy s malou excentricitou (dráhy planet) je $|A| \ll u_0$, takže $A^2\cos^2\varphi$ lze zanedbat. Diferenciální rovnici (5.10) (lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty) lze řešit standartním způsobem a nalézt řešení

$$u_{(1)} = \frac{3}{2}r_{\rm g}u_0^2 + \frac{3}{2}r_{\rm g}u_0 A\varphi\sin\varphi$$

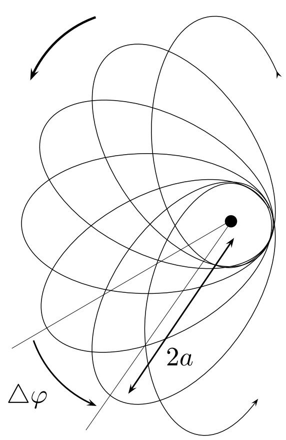
Jelikož $r_{\rm g}u_0 \ll 1$, je $\frac{3}{2}r_{\rm g}u_0\varphi \doteq \sin\left(\frac{3}{2}r_{\rm g}u_0\varphi\right), 1 \doteq \cos\left(\frac{3}{2}r_{\rm g}u_0\varphi\right)$, takže

$$\begin{aligned} u &\doteq u_0 + \frac{3}{2}r_{\rm g}u_0^2 \\ &\quad + A\left[\cos\left(\frac{3}{2}r_{\rm g}u_0\varphi\right)\cos\varphi + \sin\left(\frac{3}{2}r_{\rm g}u_0\varphi\right)\sin\varphi\right] \\ &= u_0 + \frac{3}{2}r_{\rm g}u_0^2 + A\cos\left(\varphi - \frac{3}{2}r_{\rm g}u_0\varphi\right) \end{aligned}$$

Změna z u_0 na $u_0 + \frac{3}{2}r_{\rm g}u_0$ je prakticky nepozorovatelná, člen $-\frac{3}{2}r_{\rm g}u_0\varphi$ v $A\cos\left(\varphi - \frac{3}{2}r_{\rm g}u_0\varphi\right)$ způsobí, že do maxima u (minima r, tj. perihélia) se částice vrátí nikoliv po oběhu o úhel 2π, nýbrž $2\pi + \frac{3}{2}r_{\rm g}u_0 2\pi$ (člen řádu $(r_{\rm g}u_0)^2$ zanedbáváme). Perihélium se posouvá ve směru oběho o úhel

$$\triangle\varphi = 3\pi r_{\rm g}u_0 = \frac{3\pi r_{\rm g}}{r_0} = \frac{6\pi GM}{c^2 r_0}$$

Posuv perihélia ve směru posuvu po vaziperiodické orbitě.



Je třeba určit význam veličiny $r_0 = 1/u_0$. V newtonovské aproximaci je (r představuje vzdálenost od centra; $g_{11} = 1$): $r = \frac{1}{u_0 + A\cos\varphi}$. Pro minimální a maximální vzdálenost platí

$$\begin{aligned} r_{\min} &= \frac{1}{u_0 + A}, \\ r_{\max} &= \frac{1}{u_0 - A}. \end{aligned}$$

Hlavní poloosa je dána součtem: $2a = r_{\min} + r_{\max}$. Zavedeme numerickou excentricitu dráhy e vztahem $r = \frac{r_0}{1-(r_0 A)\cos\varphi} = \frac{r_0}{1 - e\cos\varphi}$. Proto $2a = \frac{2u_0}{u_0^2 - A^2} = \frac{2r_0}{1-(r_0 A)^2} = \frac{2r_0}{1-e^2}$. Pro posuv perihélia tedy platí

$$\triangle\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}$$

Posuv roste s klesající hlavní poloosou (a rostoucí excentricitou). Z planet je pro ověření nejvhodnější Merkur. Posuv je efektev kumulativním, prakticky se dá měřit po mnoha obězích. Pro Merkur činí předpovězená hodnota posuvu $43,03''$ za 100 let.

Při pozorováních bylo nutno uvažovat efekt způsobený precesí zemské osy ($\sim 5025''$ za 100 let) a posuv perihélia vyvolaný vlivy ostatních planet (z newtonovské teorie: $\sim 532''$ za 100 let). Hodnota zbývajícího posuvu je $\triangle\varphi_{\rm obs} = (43,11 \pm 0,45)''$ za 100 let - souhlasí s předpovědí OTR s přesností 1%. (Konkurenční Brans-Dickeho teorie dává v podstatě tutéž předpověď dle současných omezení va volný parametr této teorie.) V silných polích může být posuv výraznější. U dvojtého pulsaru PSR 1913+16 je až $4,2^o$ za rok.

5.3.2 Ohyb světelného paprsku

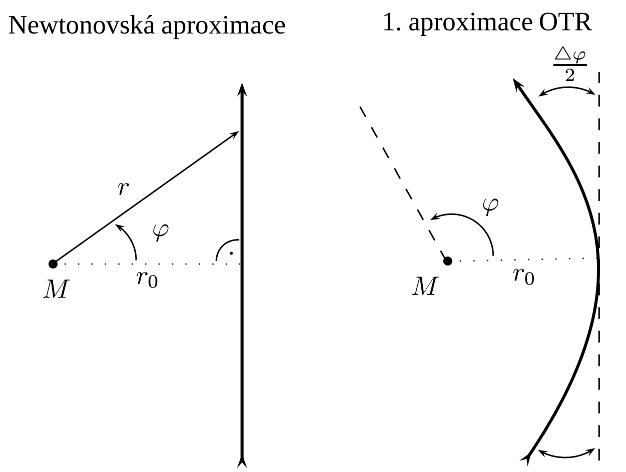
Ohyb je určen Binetovým vzorcem

$$u'' + u = \frac{3}{2}r_{\rm g}u^2$$

Ve slabém poli je člen $\sim u^2$ malu korekcí a v 0-té aproximaci je zanedbáván:

$$u''_{(0)} + u_{(0)} = 0.$$

Řešením je $u_{(0)} = u_0\cos\varphi$ resp. $r_0 = \cos\varphi$; $r = 1/u_{(0)}$ je radiální souřadnice (v 0-té aproximaci vzdálenost od centra) $r_0 = 1/u_0$ je nejmenší vzdálenst od centra. Pohyb světelného paprsku



Předpokládáme-li řešení ve tvaru $u = u_{(0)} + u_{(1)}$, pak pro malé opravy $u_{(1)}$ dostáváme rovnici

$$u''_{(1)} + u_{(1)} = \frac{3}{4}r_{\rm g}u_0^2 + \frac{3}{4}r_{\rm g}u_0^2\cos 2\varphi.$$

Rovnici lze řešit hledáním řešení ve tvaru $u_{(1)} = A + B\cos 2\varphi + e\sin 2\varphi$. Výsledkem je řešení $u_{(1)} = \frac{3}{4}r_{\rm g}u_0^2 + \frac{1}{4}r_{\rm g}u_0^2\cos 2\varphi = r_{\rm g}u_0^2 - \frac{1}{2}r_{\rm g}u_0^2\cos^2$ (Homogení řešení je již obsaženo v $u_{(0)}$.) Celkové řešení je $u = u_0\cos\varphi + r_{\rm g}u_0^2 - \frac{1}{2}r_{\rm g}u_0^2\cos^2\varphi$. Pomocí vztahu $\cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ je lze přepsat do tvaru

$$u = u_0\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + r_{\rm g}u_0^2 - \frac{r_{\rm g}u_0^2}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right). \tag{5.11}$$

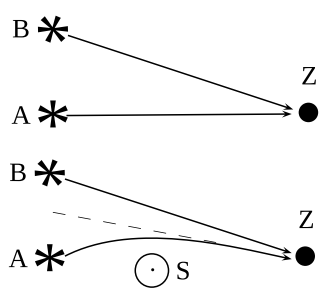
Ohyb světelného paprsku určíme z chování (5.11) pro $r \to \infty$ $(u \to 0)$. Úhel φ pak udává směr paprsku. Položíle-li v (5.11) $u = 0$, máme kvadratickou rovnici pro $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Ve slabém poli bude $\varphi \sim \frac{\pi}{2}$, takže $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \ll 1$ a $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ lze zanedbat, dostáváme rovnici

$$0 = u_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\varphi\right) + r_{\rm g} u_0^2.$$

Zajímá nás ovšem nikoliv φ, nýbrž odchylka $\triangle\varphi/2$ od směru, v němž by se foton pohyboval v plochém prostoročasu. Pro odlétající fotony je $\frac{\pi}{2} - \varphi = -\frac{\triangle\varphi}{2}$. Předpokládáme, že $|\frac{\triangle\varphi}{2}| \ll 1$, takže $\sin\frac{\triangle\varphi}{2} \doteq \frac{\triangle\varphi}{2}$ a platí $\frac{\triangle\varphi}{2} = r_{\rm g} u_0 = \frac{r_{\rm g}}{r_0} = \frac{2GM}{c^2 r_0}$. Analogickou odchylku dostaneme pro přilétající fotony. Celková odchylka paprsku (tj. úhel mezi směry přilétajícího a odlétajícího fotonu) je tedy dvojnásobná

$$\triangle\varphi = \frac{4GM}{c^2 r_0}.$$

Odchylka $\triangle\varphi$ klesá s rostoucí vzdáleností r_0 jako $1/r_0$. Nejvýraznější bude tedy v blízskosti tělesa (Slunce).

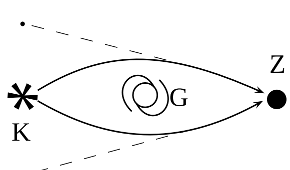


Pro paprsek procházející těsně kolem Slunce bude $\triangle\varphi \sim 1,75''$. Tato hodnota byla naměřena v souladu s předpovědí, poprvé Eddingtonem v roce 1919. (Přesnost měření byla asi 20%. Podle lokálního principu ekvivalence by ohyb byl jen poloviční, dvojnásobná hodnota je dána globálním zakřivením prostoročasu - OTR je tedy potvrzena)

Přesnější měření ohybu umožňují radioastronomická měření s rozlišením až $0,001''$. Přesnost měření ohybu v okolí Slunce pak dosahuje 1%.

5.4 Další testy

- **Zpoždění elektromagnetického signálu v gravitačním poli.** Tento efekt lze spočítat z rovnic geodetiky - z časové složky. Lokálně je rychlost stále c (vůči LIS) - zpoždění vzniká v důsledku globálního zakřivení prostoročasu. Pro signál putující mezi Zemí a Marsem kolem Slunce je $\triangle t \sim 240\mu$s při celkové době ~ 20 minut. Předpovědi ověřeny s přesností na $0,1\%$.



- **Efekt gravitační čočky** Pozorovatel může vidět vícenásobný obraz zdroje (čočkou může být vzdálená galaxie, zdrojem ještě vzdálenějši kvazar).
- **Geofyzikální jevy** - slapové efekty.
- **Radiolokační měření vzdáleností mezi Zemí a Měsícem.** Ověřuje teorie předpovídající, že se G mění s časem.
- **Měření** G **na malých vzdálenostech**
- **Měření vlivu rotace Země na precesi setrvačníku** (Lense-Thirringův efekt). V gravitačním poli Země je rychlost precese $7''$ za rok, Lense-Thirringův efekt činí pouze $0,05''$ za rok.

Kapitola 6

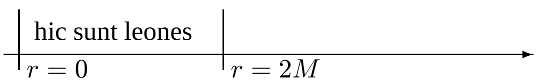
Černé díry

6.1 Globální vlastnosti Schwazchildova řešení, Kruskalův diagram

Pro $r > 2M$ je ve Schvarzchildově metrice vše v pořádku

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -\left(1-\frac{2M}{r}\right)c^2\,\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 \\ &\quad +r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right). \qquad (6.1)\end{aligned}$$

Nevíme však, jak se věci mají, když je $r < 2M$. Metrika (6.1) má v $r = 2M$ singularitu.



Aby se částice nebo světlo radiálně se pohybující dostalo na $r = 2M$ z libovolného $r > 2M$, potřebuje k tomu čas $t = \infty$, ale vlastní čas částice nebo světla je přitom konečný - jak ukážeme. Tedy Schwazchildovy souřadnice nepokrývají celou varietu a jsou krom toho v $r = 2M$ patologické. Platí

$$\dot{r}^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^2\frac{E^2-\Gamma^2}{E^2},$$

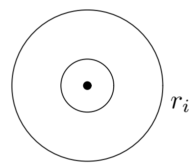
pro radiálně se pohybující částice je $\Gamma = \sqrt{1-2M/r}$. Ptáme se teď za jak dlouho doletí částice z $r_\mathrm{i} > 2M$ na $r = 2M$ dle vlastního času.

Označíme τ vlastní čas částice (dříve to bylo s), takže $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}s} \neq v_{(r)}$; $v_{(r)} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\tau}$ když τ je čas stojícího pozorovatele. Budeme hledat křivku $r = r(\tau)$, kterou odvodíme z (?)

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\Rightarrow \mathrm{d}\tau=\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t}} \\ \mathrm{d}t &= \sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2}\,\mathrm{d}t \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-\frac{M}{r}=\frac{1}{2}(E^2-1)\end{aligned}$$

To je normální klasická rovnice v newtonowské mechanice (je to ovšem jen náhoda; souřadnice r není identická se vzdáleností!) Rovnice je shodná s newtonowskou teorií pouze formálně. Musí však potom mít i formálně shodné řešení. U Newtona částice pronikne do $r = 0$ za konečný čas, zde tedy také pronikne do $r = 0$ za konečný čas τ. Z hlediska stojícího pozorovatele u díry se k $r = 2M$ dostane částice za ∞ čas pozorovatele τ (dříve užitý)

$$E=\sqrt{g_{00}}E_{\mathrm{LS}}=\sqrt{1-\frac{2M}{r}}\;\frac{1}{\sqrt{1-v_{(r)}^2}}.$$



Na r_i pustíme částici z klidu

$$E=\sqrt{1-\tfrac{2M}{r_i}}.$$

Známe tedy E, Γ a dostaneme řešení $r = \frac{1}{2}r_i(1+\cos\eta)$; $\eta \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned}t &= 2M\ln\left[\frac{\left(\frac{r_i}{2M}\right)^{1/2}+\mathrm{tg}\frac{\eta}{2}}{\left(\frac{r_i}{2M}\right)^{1/2}-\mathrm{tg}\frac{\eta}{2}}\right] \\ &\quad +2M\left(\frac{r_i}{2M}-1\right)^{1/2}\left[\eta+\frac{1}{4M}(\eta+\sin\eta)\right]\end{aligned}$$

$t \to \infty$ pro $\left(\frac{r_i}{2M}-1\right)^{1/2} = \mathrm{tg}\frac{\eta}{2}$,($r = 2M$). Pomocí souřadnice t nyní nalezneme vlastní čas τ:

$$\tau=\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t,$$

budeme uvažovat integraci až k $t = \infty$. Pak

$$\tau\big|_{t=\infty}=\left(\frac{r_i^3}{8M}\right)^{1/2}\cos^{-1}\left(\frac{4M}{r_i}-1\right)+r_i\left(1-\frac{2M}{r_i}\right)^{1/2}$$

což je konečný vlastní čas. Přes horizont se tedy dostaneme v konečném vlastním čase. Vzniká ovšem otázka, je-li plocha v $r = 2M$ regulární. Je tam $g_{00} = 0, g_{11} = \infty$ - to jsou však pouze složky tenzoru které lze měnit transformací souřadnic. Je třeba určit, jak vypadají na $r = 2M$ invarianty. Vychází například $g = -r^4\sin^2\Theta$ (skalární hustota). Skutečnou fyzikální veličinou je v obecné relativitě například křivost. Homogení gravitační pole lze toiž odtransformovat, křivost (nehomogenity) ovšem odtransformovat nelze. Vychází

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{12(2M)^2}{r^6},$$

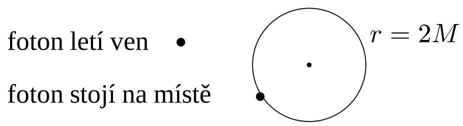
(tento invaritn vzdáleně připomíná slapové síly - na každý konec působí síla jinak). Sílu přím charakterizuje geodetická deviace:

$$e^{\alpha}_{(\mu)}e^{\beta}_{(\nu)}e^{\gamma}_{(\kappa)}e^{\delta}_{(\lambda)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{(\mu)(\nu)(\kappa)(\lambda)},$$

coý je projekce Riemanova tenzoru do tetrády $e^{\alpha}_{(\mu)}$. Fyzikální terádu $e^{\alpha}_{(\mu)}$ sebou nese padající pozorovatel. $R_{(\mu)(\nu)(\kappa)(\lambda)}$ se vyskytují v geodetické deviaci a charakterizují jak moc to chce pozorovatele roztrhnout

$$R_{(\mu)(\nu)(\kappa)(\lambda)} \sim \frac{2M}{r^3}.$$

Vidíme, že fyzikálně není plocha $r = 2M$ nijak singulární. Je to ale oblast časoprostoru popisující historii fotonů. Fotony na $r = 2M$ by chtěly jít ven, ale brání jim v tom gravitační pole.



Argumety pro toto tvrzení jsou:

- r =konst, Θ, φ =konst

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2; r \to 2M \Rightarrow \mathrm{d}s^2 \to 0,$$

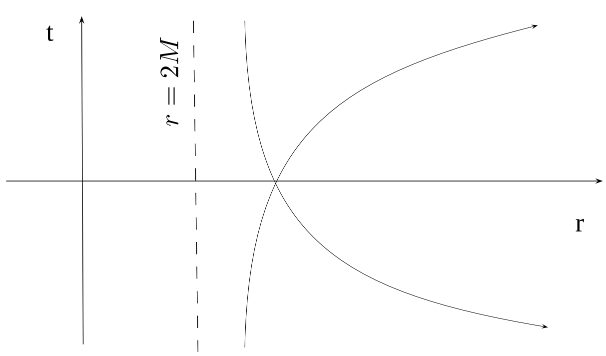
  což je právě světelný interval a plocha $r = 2M$ je tedy světelná, neboli nulová plocha.

- Uiková rychlost

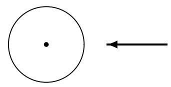
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mGM}{r_i} = E = 0 \Rightarrow v = \frac{2GM}{r_i},$$

  dosahuje rychlosti světla $v = c$ na $r_i = \frac{2GM}{c^2}$ ($r_i = 2M$) na Schwarzchildově poloměru. Tento argumet je ovšem daný náhodnou koincidencí.

Nejlepší bude najít nějaké souřadnice, které dobře popisují oblast $r = 2M$, a v nich vyšetřit podstatu horizontu. Ve Schwarzchildově metrice netvoří světelný kužel přímky, nýbrž křivky, které vypadají jako v následujícím obrázku:



Dobré nejsou ani izotropní souřadnice, kde to vychází podobně. Geodetika je sice na tomto obrázku nekonečná, má však konečnou délku, jak jsme již ukázali. Varieta je geodeticky úplná, jestliže každá geodetika (prostorová, časová i světelná) může být protažena do nekonečných hodnot vlastního parametru na obě strany - do minulosti i do budoucnosti (pokud nenarazí na singularitu). Zůstaneme-li u Schwarzchildových souřadnic, nemáme naději, že bychom mohli dostat úplnou varietu, neboť tyto souřadnice pokrývají pouze oblast $r \geq 2M$. Geodetiky ovšem lze v principu protáhnout (až na ty co narazí na singularitu). Šlo by například vzít Lemaitrovy souřadnice (spojené s částicemi), které ale nepokrývají celou varietu a mají špatnou strukturu světelných kuželů stejně jako Schwarzchildovy souřadnice. My se teď především pokusíme zkonstruovat souřadnice v nichž by světelné kužely ve všech místech svíraly se souřadnými osami úhel 45^o. Toto splňují **Eddington-Finkelsteinovy souřadnice**. Získáme je tímto způsobem: Zadefinujeme souřadnice t^+, přičemž (t^+, Θ, φ) =konst odpovídá paprsku (radiálnímu)

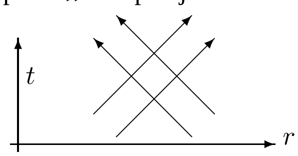


$$t^+ = t + r + 2M\ln\left(\tfrac{r}{2M} - 1\right),$$

a dále definujeme t^- tak, aby (t^-, Θ, φ) =konst odpovídalo vycházejícímu paprsku

$$t^- = t - r - 2M\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right);$$

pro $r \gg M$ pak je t^+ advancovaný a t^- retardovaný čas



$$u = t - r$$
$$v = t + r$$

V křivém prostoru dostáváme pro světlo ($\mathrm{d}s^2 = 0$) rovnici:

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\mathrm{d}r^2 &= 0\\ \Rightarrow \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2}\mathrm{d}r^2 &= 0.\end{aligned}$$

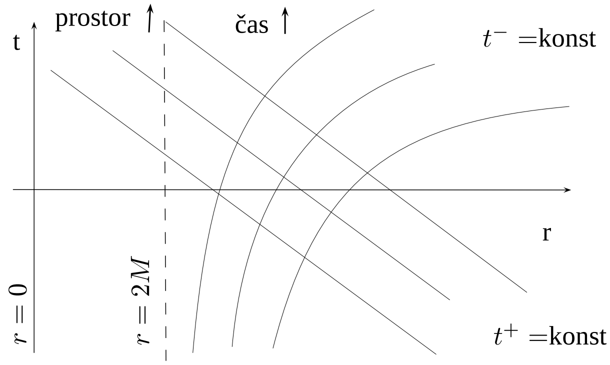
Zavádí se nová souřadnice

$$\mathrm{d}r^* = \frac{\mathrm{d}r}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad r^* = r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

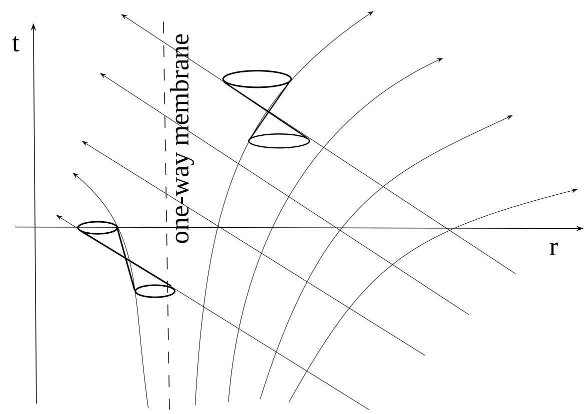
Pro světelný paprsek pak platí, že $t \pm r^*$ =konst (neboť $\mathrm{d}t = \pm\,\mathrm{d}r^*$). Uděláme-li přechod ze Schwarzchildových souřadnic (t, r, Θ, φ) k souřadnicím $(t^+, r, \Theta, \varphi)$, resp. $(t^-, r, \Theta, \varphi)$, pak máme

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\mathrm{d}t^{\pm}\right)^2 \mp 2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t^{\pm} - r^2\,\mathrm{d}\Omega^2.$$

Tyto souřadnice dávají „více variety“.



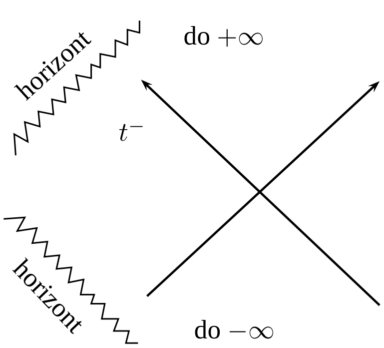
Je vidět, že čáry t^- =konst (červené?) nemohu protáhnout za $r = 2M$. Naopak čáry t^+ =konst již za $r = 2M$ protáhnout lze. Pro $r < 2M$ je svislý směr (souřadnice t) směrem prostorovým, na rozdíl od oblasti $r > 2M$, kde je svislý směr časovým.



V těchto souřadnicích je již dobře vidět, že se jedná o černou díru. Jsou zde již dobře popsány vycházející světočáry. Tyto souřadnice však špatně popisují vycházející paprsky. Zkusíme nyní souřadnice ($t^+, t^-, \Theta, \varphi$). Je ovšem třeba poznamenat, že pro tyto souřadnice a ty předcházející rovněž neplatí Hilbertovy podmínky a nelze je tedy realizovat hmotnými pozorovatli. Budeme mít metriku

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \mathrm{d}t^+ \, \mathrm{d}t^- - r^2 \, \mathrm{d}\Omega^2,$$

kde $r = r(t^+, t^-)$. Prosotočasový diagram pak bude vypadat takto:



Zde už máme strukturu světelných kuželů takovou, jakou jsme potřebovali, ale je zde potlačena oblast horizontu. Dosud jsme se zabývali oblastí $r > 2M$ a tuto oblast máme v těchto souřadnicích zobrazenu na celé rovině. Máme tedy hezké kužely, ale horizont v ∞ a musíme proto hledat nové souřadnice, v nichž by byl horizot stlačen zpátky do konečné vzdálenosti. Toto provedme zavedením **kruskalových souřadnic**. Dříve zavedené souřadnice t^+, t^- jsou světelné. My si nejprve zavedeme $\widetilde{u}, \widetilde{v}$, které budou též světelné a pak zavedeme teprve Kruskalovy souřadnice takové, že jedna bude časová a druhá prostorová. Nejdříve tedy posuneme horizonty žpět do konečna:

$$\widetilde{u} = -\mathrm{e}^{-\alpha t^-} \qquad \widetilde{v} = \mathrm{e}^{\alpha t^+},$$

(znaménko $-$ je zde proto, aby obě t^- a $\widetilde{u}$ šly současně - rostly).

$$\mathrm{d}t^+ \, \mathrm{d}t^- = \mathrm{d}\widetilde{u} \, \mathrm{d}\widetilde{v} \frac{\mathrm{e}^{\alpha(t^- - t^+)}}{\alpha^2} = 16M^2 \mathrm{e}^{-\frac{r}{2M}} \frac{\frac{2M}{r}}{1 - \frac{2M}{r}} \mathrm{d}\widetilde{u} \, \mathrm{d}\widetilde{v}$$

Což se dostane vezmeme-li $\alpha = \frac{1}{4M}$ dosadíme-li za

$$t^+ = t + r + \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \qquad t^- = t - r - \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

V původní metrice bylo $\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \mathrm{d}t^+ \, \mathrm{d}t^-$, takže u tohoto členu vyjde hezký koeficient:

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{32M^3}{r} \mathrm{e}^{-r/2M} \, \mathrm{d}\widetilde{u} \, \mathrm{d}\widetilde{v} - r^2 \, \mathrm{d}\Omega^2.$$

Platí

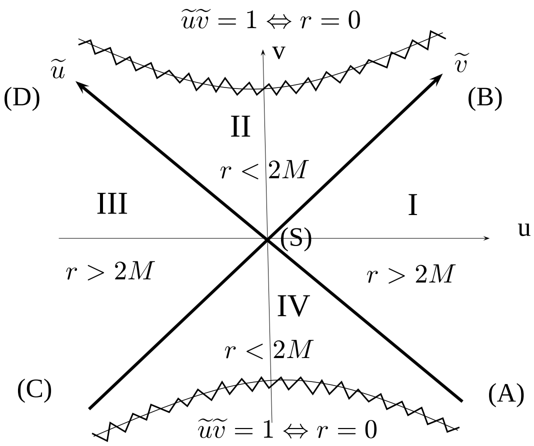
$$-\widetilde{u}\widetilde{v} = \mathrm{e}^{r/2M} \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \Rightarrow r = r(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \quad (6.2)$$

$$-\frac{\widetilde{v}}{\widetilde{u}} = \mathrm{e}^{t/2M} \qquad (\widetilde{u}, \widetilde{v} \leftrightarrow r, t) \quad (6.3)$$

Toto vše je pro $r > 2M$. Máme teď ale souřadnice $\widetilde{u}, \widetilde{v}$, kde je metrika dokonale analytická a není v nich žádná singularita pro $r = 2M$. Platí, že r je analytickou funkcí $\widetilde{u}, \widetilde{v}$. Pro $r > 2M$ musí být $\widetilde{u}\widetilde{v} < 0$. Tedy oblast Schwarzchildových souřadnic $r > 2M$, $t \in (-\infty, \infty)$ je oborem $\widetilde{u}\widetilde{v} < 0$. Předpokládáme ovšem, že metrika s $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ bude platit všude, i když odvození platí jen pro $r > 2M$. Metrické koeficienty lze rozšířit na všechna $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ (je to analytické) a $\mathrm{d}s^2$ bude řešením Einsteinových rovnic pro všechna $\widetilde{u}, \widetilde{v}$, protože Einsteinovy rovnice jsou analytické a jejich řešení lze analyticky spojovat. Kruskalovy souřadnice dostaneme transformací

$$\widetilde{u} = v - u, \quad \widetilde{v} = v + u.$$

Kruskalovy souřadnice jsou výhodné pro interpretaci, bohužel se v nich špatně počítá.

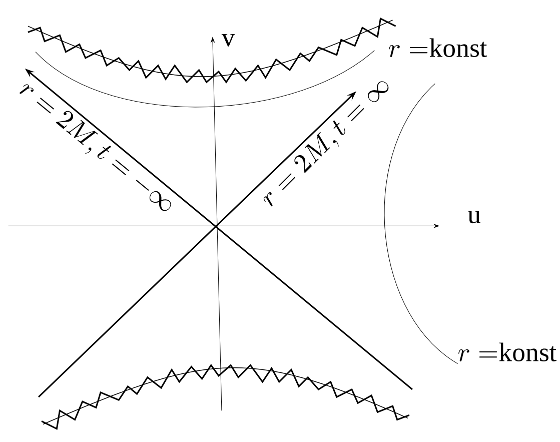


Původně jsme pracovali s oblastí (A)(S)(B) - tj. I., kde je $\widetilde{u}\widetilde{v} < 0$. V oblasti III. (C)(S)(B) je ovšem také $\widetilde{u}\widetilde{v} < 0$, a máme ji tedy ve varietě ještě jednou. V oblasti II. a IV. ovšem naplatí (6.3) nýbrž rovnice

$$e^{t/2M} = \frac{\widetilde{v}}{\widetilde{u}} \tag{6.4}$$

V oblasti $r < 2M$ je přechod k souřadnicím $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ pomocí (6.2),(6.4), pro $r > 2M$ pomocí (6.2),(6.3). Z (6.2) dostanu pro (A)(S)(B) všechny hodnoty $r > 2M$ a z (6.2) všechny hodnoty $t \in (-\infty, \infty)$. Celá oblast $r \in (2M, \infty) \times t \in (-\infty, \infty)$ se zobrazí na I. Horizonty událostí jsou souřadnicové osy. (Ze dvou špatných map jsme dostali jednu dobrou.) Souřadnice $r \in (0, \infty) \times t \in (-\infty, \infty)$ nepokrývají celou varietu, ale pouze kvadranty I, II. **Kruskalovy souřadnice** jsou:

$$\begin{aligned}
u &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \mathrm{ch}\frac{t}{4M}, \\
v &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \mathrm{sh}\frac{t}{4M}, \quad \text{pro} \quad r > 2M \\
u &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \mathrm{sh}\frac{t}{4M}, \\
v &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \mathrm{ch}\frac{t}{4M}, \quad \text{pro} \quad r < 2M
\end{aligned}$$



$$\frac{u}{v} = \mathrm{th}\frac{t}{4M}, \quad v^2 - u^2 = \text{konst} \Leftrightarrow r = \text{konst}$$

Pro $t \to \infty$ je $u = v$. Přímky jdoucí počátkem odpovídají $t =$konst (v I,II). Křivky $r =$konst jsou v (u, v) souřadnicích hyperbolami. Světelné kužely jsou přesně pod úhlem 45^o, jak je patrno z odvození. Hyperbola $r =$konst je v oblasti I. časová, v oblasti II. prostorová (ve II. je r časová souřadnice, a proto $r =$konst je prostorová křivka). Ve Schwarzchildových souřadnicích by mělo být $r = 2M, t = \infty$ dvojdimenziální. Ale zde je $r = 2M, t = \infty$ trojdimenzionální.

6.2 Černé díry

V Kruskalových souřadnicích je metrika nestacionární, neboť $r = r(u, v)$ a závisí tedy na časové souřadnici v. Platí

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \left(dv^2 - du^2\right) - r^2 \, d\Omega^2,$$

právě r dává nestatičnost. Dále je v Kruskalových souřadnicích velmi dobře vidět úlohu horizontu jako jednocestné membrány.

Je vidět, že každý světelný paprsek nebo částice v oblasti II. musí nutně skončit v singularitě $r = 0$, ostáváme se tak k pojmu **černá díra**. Tento termín zavedl roku 1960 Wheeler. Černá díra je jeden z nejednodužších objektů ve vesmíru leze ji zvnějšku kompletně popsat třemi parametry: hmotností M, nábojem Q a momentem hybnosti J. Toto jest „no hair“ teorém - černá díra nemá vlasy.

Černé díry vznikají gravitačním kolapsem, může se jednat například o konečné stádium velmi hmotné hvězdy. Dále se uvažují takzvané primordiální (prvotní) černé díry.

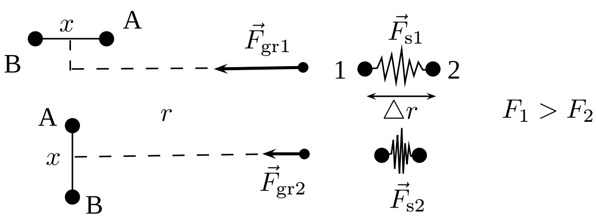
Černé díry jsou velmi důležité astrofyzikální objekty nacházíme je v centrech aktivních galaxií (kde jsou „motorem“ akrece), ve středu naší Mléčné dráhy je také supermasivní černá díra.

Hawkingovo záření, gravitační kolaps, finální stadia hvězd, akreční proces ?

Kapitola 7

Slabé gravitační vlny

OTR předpovídá na rozdíl od Newtonovy teorie gravitace existenci gravitačních vln. Gravitační vlny budeme zde uvažovat pouze velmi slabé, takže budeme vycházet z linearizovaných Einsteinových rovnic. Ani v případě slabých gravitačních nelze použít Newtonovu teorii gravitace, neboť není teorií dynamickou (čas v ní neexistuje explicitně). Gravitační síla v ní působí „přímo na dálku“; rychlost šíření gravitační interakce je nekonečná. Zdůrazněme, že energii (a iformace) lze přenášet pomocí gravitačního pole i podle newtonovské analýzy:



Rozdíl slapových sil $F_{\rm s1} - F_{\rm s2} = 9GMm\frac{\triangle r x^2}{r^5}$. Natáčením soustavy bodů lze přenášet signály pomocí gravitačního pole. Dochází přitom i k přenost energie - natažení a smrštění pružiny může konat práci. Dle Newtonovy teorie ovšem dochází k okamžitému přenosu, což je zásadní spor s principem kauzality. Newonovu teorii lze aplikovat pro $r \ll cT$ (kde T je doba pootočení „zdroje“ z polohy 1. do 2.). Pro $r \geq cT$ je nutno použít OTR i v připadě velmi slabých gravitaních polí, neboť signály se k detektoru musí šířit rychlostí menší, než je rychlost světla. (Povšimněme si prosím, že pole slapových sil vymizí jako $1/r^5$ - na rozdíl od zářivého pole, jenž mizí jako $1/r$.)

7.1 Linearizované Einsteinovy rovnice

Vycházíme z předpokladu existence souřadnicového systému, v němž je metrika blízká k Minkovského metrice STR:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}; \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

Podobně předpokládáme i $|h_{\mu\nu,\rho}| \ll 1$. $h_{\mu\nu}$ je tenzorem vůči Lorentzovým souřadnicím $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$. Platí $g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}} g_{\rho\sigma} = \Lambda_{\lambda}{}^{\rho} \Lambda_{\beta}{}^{\sigma} \left(\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}\right) \\ &= \eta_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha}{}^{\rho} \Lambda_{\beta}{}^{\sigma} h_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

a $h'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}{}^{\rho}\Lambda_{\beta}{}^{\sigma} h_{\rho\sigma}$. V dalšímm budeme ve všech výrazech zachovávat jen členy $\sim h_{\mu\nu}$, ostatní budeme zanedbávat, takže z nelineárních Einsteinových rovnic $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ dostaneme linearizované rovnice. Zavedeme označení $h_{\mu}{}^{\nu} = \eta^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha}$; $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} h_{\beta\alpha}$; $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, s přeností do 1. řádu v h (plyne z $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$). Linearizované složky afinní konexe:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(-g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\beta}\right) \\ &\doteq \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \left(-h_{\beta\gamma,\alpha} + h_{\alpha\beta,\gamma} + h_{\gamma\alpha,\beta}\right). \end{aligned}$$

Linearizovaný Ricciho tenzor:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} \\ &\doteq \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} \left(-h_{\mu\nu,\sigma\alpha} + h_{\nu\sigma,\mu\alpha} + h_{\nu\alpha,\sigma\nu} - h_{\alpha\sigma,\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h^{\alpha}{}_{\alpha,\mu\nu}\right). \end{aligned}$$

Platí

$$h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\nu,\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \equiv \Box h_{\mu\nu}$$

Skalární křivost: $R = R_{\mu}{}^{\mu} \doteq h^{\mu\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu}{}^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha}$ a Einsteinův tenzor:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \doteq R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \\ &\doteq \frac{1}{2} \Big[- h_{\mu\nu,\alpha^{\alpha}} + h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} - h_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{,\mu\nu} \\ &\quad - \eta_{\mu\nu} \left(h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - h_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{,\beta}{}^{\beta}\right) \Big]. \end{aligned}$$

Je výhodné zavést novou veličinu[1] $\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h_{\alpha}{}^{\alpha}$; dále platí $h_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\overline{h}_{\alpha}{}^{\alpha}$. Pak linearizované Einsteinovy rovnice mají tvar

$$-\overline{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \overline{h}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + \overline{h}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

[1] Co je nejhezčí? $\bar{h}_{\mu\nu} h_{\bar{\mu\nu}} \overline{h}_{\mu\nu} \overline{h_{\mu\nu}}$

Aplikujeme-li na levou stranu operátor $\eta^{\rho\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)$, dostaneme nulový výsledek . Proto pravá strana musí splňovat rovnici

$$\eta^{\rho\nu}T_{\mu\nu,\rho} = T_\mu{}^\rho{}_{,\rho} = 0.$$

7.2 Lorentzova transformace

Linerizované Einsteinovy rovnice se výrazným způsobem zjednoduší, budeme-li požadovat splnění Lorentzovy kalibrační podmínky (aanlogické elektrodynamické Lorentzově podmínce)

$$\overline{h}_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0.$$

Vyšetřeme nyní kalibrační transformace, jimiž budeme moci zajistit splnění Lorentzovy kalibrace. Budeme pochopitelně požadovat, aby se i v nových souřadnicích metrika málo lišila od Minkovského prostoročasu. Uvažujme infinitezimální transformaci souřadnic $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$, kde $\xi^\mu(x)$ je libovolné infinitezimální pole ($\xi^\mu, \partial\xi^\mu/\partial x^\rho \sim h_{\mu\nu}; |\xi_{\mu,\nu\alpha}\xi^\alpha| \ll h$). Vyjděme z obecného vztahu

$$g'_{\alpha\beta}(x'^\mu) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta}g_{\rho\sigma}(x^\nu).$$

Použijeme inverzní kalibrační transformaci $x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu(x')$ (díky infinitezimálnosti ξ^μ lze $x \to x'$). Pak ($\xi_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\xi^\beta$)

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &+ h'_{\alpha\beta}(x'^\mu) = \\ &= [\delta^\rho_\alpha - \xi^\rho{}_{,\alpha}]\,[\delta^\sigma_\beta - \xi^\sigma{}_{,\beta}][\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}(x^\nu)] \\ &= \eta_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + h_{\alpha,\beta} + h_{\alpha\beta}(x^\nu)\end{aligned}$$

a dostáváme kalibrační transformaci odchylek od Minkovského metriky: $h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu}(x) - \xi_{\nu,\mu}(x)$. Nyní lze využít kalibrační transformaci pro splnění Lorentzovy podmínky. Pro $\overline{h}_{\mu\nu}$ dostáváme kalibrační podmínku

$$\overline{h}'_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha}.$$

Bude-li v souřadnicové soustavě x^α $\overline{h}_\mu{}^\nu{}_{,\nu} \neq 0$, lze přejít k x'^α a požadovat, aby v této soustavě bylo $\overline{h}_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0$. Musí být

$$0 = \overline{h}_\mu{}^\nu{}_{,\nu} - \xi_{\mu,\nu}{}^\nu - \xi^\nu{}_{,\mu\nu} + \xi^\alpha{}_{,\mu\alpha} = \overline{h}_\mu{}^\nu{}_{,\nu} - \xi_{\mu,\nu}{}^\nu$$

Kalibrační transformace vedoucí k Lorentzově transformaci je pak dána podmínkou (D'Alambertova)

$$\Box\xi_\mu = \overline{h}_\mu{}^\nu{}_{,\nu}.$$

Z elektrodynamiky je známo, že tato rovnice má vždy řešení, takže Lorentzovu kalibrační podmínku lze vždy splnit. Soustava souřadnic ovšem není D'Alambertovou rovnicí plně určena: kalibrační transformací splňující podmínku $\Box\tilde{\xi}_\mu = 0$ lze přejít k nové soustavě souřadnic bez narušení Lorentzovy kalibrace. V Lorentzově kalibraci nabývají linearizované rovnice gravitačního pole tvar

$$\Box\overline{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \qquad \overline{h}_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0. \tag{7.1}$$

7.3 Slabá rovinná gravitační vlna

Linearizované Einsteinovy rovnice ve vakuu ($T_{\mu\nu}$) se zjednoduší na (s Lorentzovou kalibrací)

$$\Box\widetilde{h}_{\mu\nu} = 0; \qquad \widetilde{h}_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0.$$

[2] Vakuové linearizované Einsteinovy rovnice evidentně mají řešení (analogicky s elektrodynamikou) popisující monochromatickou rovinnou gravitační vlnu:

$$\overline{h}_{\mu\nu} = Re\left[A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x^\sigma}\right],$$

kde $A_{\mu\nu}$ je (obecně komplexní) konstantí tenzor a k^σ reálný konstantní vektor - vlnový vektor. Re znamená, že pouze reálná část má fyzikální význam. Einsteinovy rovnice pak dávají $\Box\overline{h}_{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta\eta^{\alpha\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x^\sigma} = 0$, takže $k_\sigma k^\sigma = 0$ a vlnový vektor je nulový vektor. Úhlová frekvence $\omega = c\cdot|\vec{k}| \equiv c(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$, fáze vlny má tvar ($k^0 = \omega/c$) $k_\sigma x^\sigma = -k^0ct + \vec{k}\cdot\vec{r} = -\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r} = -\omega\,(t - \vec{u}\cdot\vec{r})$. Máme gravitační rovinnou harmonickou vlnu, jež se šíří rychlostí světla ve směru $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{1}{c}\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$. Lorentzova kalibrace dává:

$$h_{\mu\nu,\alpha} = \mathrm{i}A_{\mu\nu}k_\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x^\sigma}, \quad \eta^{\alpha\nu}h_{\mu\nu,\alpha} = \mathrm{i}A_{\mu\nu}k_\alpha k^\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\sigma x^\sigma}.$$

Dostáváme tedy ortogonalitu amplitudy a vlnového vektoru

$$A_{\mu\nu}k^\nu = 0.$$

Lorentzovou kalibrací není systém určen jednoznačně. Kalibrační transformace splňující vlnovou rovnici $\Box\xi^\mu \equiv \xi^\mu{}_{,\sigma}{}^\sigma = 0$ vede ke změně metrického tenzoru: $\overline{h}'_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^\sigma{}_{,\sigma}$, jenž stále splňuje Lorentzovu kalibraci ($\overline{h}'_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0$). Kalibračními transformacemi lze tedy dále dále omezit volnost ve vazbě amplitudy tenzoru $\overline{h}_{\mu\nu}$. Vlna obsahuje nejen skutečné (fyzikální) stupně volnosti, nýbrž i souřadnicové vlny, jenž lze vhodnou volbou souřadnic odtransformovat. Zvolíme-li řešení $\Box\xi^\mu$ ve tvaru $\xi^\mu = -\mathrm{i}B^\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{sigma}x^\sigma}$, kde B^μ je libovolný konstantní vektor. Z transformace $\overline{h}'_{\mu\nu}$ dostáváme:

$$A_{\mu\nu} \to A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - B_\mu k_\nu - B_\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu}B_\sigma k^\sigma$$

Čtyři konstanty je možno volit vždy tak, aby

$$A'_{0\mu} = 0, \qquad A'_\sigma{}^\sigma = 0.$$

První podmínka reprezentuje 3 nezávislé podmínky ($A'_{\mu\nu}k^\mu = 0$, takže $A'_{00} = 0$, pokud $A'_{0m} = 0$). Druhá podmínka má kovariantní tvar; první můžeme rovněž zapsat nezávisle na souřadnicovém systému. Vybereme konstantí vektorové pole U^μ =konst. Pak požadujeme místo $A'_{0\mu} = 0$, aby

$$A'_{\nu\mu}U^\nu = 0.$$

Volba U^μ odpovídá volbě určitého inerciálního referenčního systému z hlediska plochého pozadí. V Lorentzově

[2] Lze ovšem ukázat, že je pak možno psát $\Box h_{\mu\nu} = 0; h_{\mu,\nu} = \frac{1}{2}h_\alpha{}^\alpha{}_{,\mu}$.

systému ($U^\nu = (1,0,0,0)$) dostáváme původní podmínku ${A'}_{0\mu} = 0$. Lorenzova kalibrace a kalibrační transformace dávají 8 nezávislých vazeb na složky tenzoru amplitudy, jež lze splnit vhodnou volbou kalibrace (tj. pomocí infinitezimálních kalibračních transformací):

$$A_{\mu\sigma}k^\sigma = A_\sigma{}^\sigma = A_{\mu\nu}U^\sigma = 0.$$

Těchto 8 podmínek určuje kalibraci jednoznačně. Symetrický tenzor $A_{\mu\nu}$ má proto pouze 2^3 volných, nezávislých složek s fyzikálním významem. Rovinná gravitační vlna má tedy 2 stupně volnosti. Vzhledem ke kalibrační podmínce $h_\sigma{}^\sigma = 0$ je jasné, že $\overline{h}_{\mu\nu}$ je přímo rovo odchylkám od minkovského metriky:

$$\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu},$$

a pro $h_{\mu\nu}$ platí kalibrační relace $h_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = h_\sigma{}^\sigma = h_{\mu\nu}U^\nu = 0$. Libovolnou rovinnou gravitační vlnu (slabou) lze reprezentovat jako vlnový balík sestrojený z monochromatických vln pomocí Fourierova integrálu:

$$\overline{h}_{\mu\nu}(x^\rho) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^{(3)}k\overline{h}_{\mu\nu}(\omega,\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\rho x^\rho}.$$

Pro tuto vlnu platí tytéž kalibrační vztahy jako pro monochromatickou vlnu (důsledek linearity).

Z předchozího postupu plyne, že lze vždy volit kalibraci, v níž všechny rovinné vlny, jež superpozicí vytvářejí uvažovanou vlnu, budou splňovat kalibrační podmínky. Speciálně v Lorentzově systému ($U^\mu = \delta^\mu_0$), dostáváme

$$h_{0\mu} = h_{ij,j} = h_{kk} = 0.$$

Zde se sčítá přes dolní indexy; $h_{\mu\nu}$ s časovým indexem nulové, takže při zvyšování a snižování indexů se nemění znaménko. Tenzor splňující tyto relace je transverzální a bezstopý „transverse-traceless“ - jedná se o TT-kalibraci, označujeme $h_{\mu\nu} = h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}$. Transverzalita znamená jen vymizení všech časových složek (transverzalita vůči časovému směru daném U^μ), tak kolmost $\vec{k}$ na prostorový tenzor $h_{ij}, h_{ij}k_j = 0$. V této kalibraci si vyjádříme explicitně vlnu šířící se ve směru osy z:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\left(-x^0+x^3\right)} = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{i\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} = h_{yx} & 0 \\ 0 & h_{yx} & h_{yy} = -h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vlna je popsána dvěma nezávislými složkami odpovídajícími dvěma stupňům volnosti - dvěma nezávislým stavům polarizace. Označme dvě nezávislé konstantní amplitudy $A_{xx} = -A_{yy} = A_+$ a $A_{xy} = A_{yx} = A_\times$. Tenzorové pole $h_{\mu\nu}$ můžeme rozložit ve tvaru

$$h_{\mu\nu} = h_{+\mu\nu} + h_{\times\mu\nu};$$

[3] $2 = 10 - 8$

$h_{+\mu\nu}$ má nenulové jen složky $h_{xx} = -h_{yy}$, $h_{\times\mu\nu}$ má nenulové složky $h_{xy} = h_{yx}$. Máme tak rozklad gravitační vlny do dvou nezávislých lineárně polarizovaných vln.[4] Zavedeme-li $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ jako dva jednotlivé navzájem kolmé vektory, kolmé ke směru šíření vlny, pak

$$\begin{aligned} e_{+ij} &= \left(\vec{e_1}\right)_i\left(\vec{e_1}\right)_j - \left(\vec{e_2}\right)_j\left(\vec{e_2}\right)_i, \\ e_{\times ij} &= \left(\vec{e_1}\right)_i\left(\vec{e_2}\right)_j - \left(\vec{e_1}\right)_j\left(\vec{e_2}\right)_i \end{aligned}$$

a dvě nazávislé lineárně polarizované lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} h_{+ij} &= A_+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}\right)}e_{+ij}, \\ h_{\times ij} &= A_\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\vec{n}\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}\right)}e_{\times ij}. \end{aligned}$$

Z této obecné formulace dostaneme speciální tvar h_{xx}, h_{xy} pro $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$, $\vec{n} = (0,0,1)$. Pro kruhovou polarizaci gravitační vlny jsou jednotkové tenzory dány vztahy[5]

$$e_{\mathrm{P}ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_{+ij} + ie_{\times ij}\right), \quad e_{\mathrm{L}ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_{+ij} - ie_{\times ij}\right)$$

7.4 Interakce s testovacími částicemi a přenos energie

Fyzikální podstatu gravitačních vln nejjasněji osvětlíme, prozkoumáme-li jejich vliv na testovací částice. Pohyb jedné částice nemá fyzikální význam, musíme tedy zkoumat relativní (vzájemný) pohyb dvou částic. Volné částice se pohybují po geodetikách:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$

V našem případě je $\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = c\delta^\mu_0 = (c,0,0,0)$, neboť $\Gamma^\mu{}_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\left(-h_{00,\alpha} + h_{0\alpha,0} + h_{\alpha 0,0}\right) = 0$, neboť ve zvolené kalibraci $h_{0\alpha} = 0$. Musí být tedy $x^i =$konst. Částice ve zvoleném systému zůstávají v klidu. Gravitační vlna ovšem mění vzdálenosti, takže dojde ke vzájemnému pohybu částic. Vzdálenost je dána výrazem

$$\begin{aligned} (\triangle s)^2 &= g_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = \left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\right)n^\alpha n^\beta, \\ n^\alpha &= x^\alpha_{(A)} - x^\alpha_{(A)}. \end{aligned}$$

Je jasné, že pokud je spojnice částic A, B rovnoběžná se směrem šíření vlny, vzdálenost se nemění: $n^\alpha = (0,0,0,l) = l\cdot\delta^\alpha_3$; $h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(-t+\frac{z}{c}\right)}$; $A_{xx}, A_{xy}, A_{yy} \neq 0$.

Přejděmě k rovnici geodetické deviace. Uvažujme lokálně inerciální systém $\widetilde{x}^\alpha$, spojený s volnou „padající“ částicí A, jež je v klidu vůči x^1, x^2, x^3 . Počátek LIS spojíme

[4] Pro elektromagnetické pole platí: $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$; $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$ - lineárně polarizované vlny $\vec{E_1} = (E_x,0,0)$, $\vec{E_2} = (0,E_y,0)$; $\vec{E_1} = A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}\vec{e_1}$, $\vec{E_2} = A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}\vec{e_2}$

[5] Kruhová polarizace pro elektromagnetické pole: $\vec{e_{\mathrm{P}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e_1} + i\vec{e_2}\right)$, $\vec{e_{\mathrm{L}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e_1} - i\vec{e_2}\right)$.

s částicí A. V počátku LIS bude $\widetilde{g}_{\mu\nu}(\widetilde{x}^0,0,0,0) = \eta_{\mu\nu}$, $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(\widetilde{x}^0,0,0,0s) = 0$. Transformační vztah mezi souřadnicemi x^α a x'^α je při vhodné orientaci os $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} = \delta^\mu_\alpha + O(h_{j\delta???})$. Souřadnice částice B označíme $\widetilde{x}^i_{(B)}$; $\widetilde{x}^i_{(A)} = 0$. Vektor $\widetilde{n}^\alpha$ spojující obě částice je v libovolném čase $\widetilde{x}$ ($\widetilde{x}^0_{(A)} = \widetilde{x}^0_{(B)}$):

$$\widetilde{n}^i = \widetilde{x}^i_{(B)}, \qquad \widetilde{n}^0 = 0.$$

Zavedený LIS je nejpřirozenější soustavou souřadnic pozorovatele A; čas měří vlastními hodinami, prostorové vzdálenosti tyčemi. Před příchodem vlny byla částice B v klidu, gravitační vlna způsobí, že se B začne vůči A pohybovat. Pro vektor $\widetilde{n}^\alpha$ platí rovnice geodetické deviace

$$\frac{\mathrm{D}^2\widetilde{n}^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = -\widetilde{R}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\widetilde{U}^\beta_{(A)}\widetilde{\eta}^\gamma\widetilde{U}^\gamma_{(B)},$$

$\widetilde{U}^\alpha_{(A)} = c\delta^\alpha_0, \widetilde{U}^\alpha_{(B)} = c\delta^\alpha_0 + O(h)$ - částice B stojí vůči x^1, x^2, x^3. S přesností do prvního řádu v h je $\frac{\mathrm{D}^2\widetilde{u}^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \doteq -\widetilde{R}^{\alpha}{}_{0\gamma0}c^2\widetilde{u}^\gamma$. Jelikož afinní konexe vymizí v počátku, lze absolutní derivaci nahradit obyčejnou; využitím symetrií pak dále bude

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{u}^i}{\mathrm{d}\tau^2} \doteq c^2\widetilde{R}^{i}{}_{0j0}\widetilde{u}^j = -c^2\widetilde{R}_{i0j0}\widetilde{\eta}^j.$$

Rovnice platí s přesností do 1. řádu v h, zajímáme se jen o prostorové složky $\widetilde{u}^\alpha$, neboť $\widetilde{u}^0 = 0$ díky $\widetilde{u}^\alpha\widetilde{U}_{(A)\alpha} = 0$. Složky $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ jsou 1. řádu v h; zanedbáme-li členy nejvyžšího řádu, je $\widetilde{R}_{i0j0} \sim R_{i0j0}$ (složky v souřadnicích x^μ). Potom je

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{x}^i_{(B)}}{\mathrm{d}\tau^2} = c^2R_{i0j0}\widetilde{x}^j_{(B)}.$$

Nyní vyjádříme Riemanův tenzor pomocí $h_{\mu\nu}$. V TT-kalibraci bude $R_{\alpha0\gamma0} = -\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,00}$ a rovnice geodetické derivace dává

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{x}^i_{(B)}}{\mathrm{d}\widetilde{t}^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial\widetilde{t}^2}\widetilde{x}^j_{(B)},$$
$$\left(h_{ij,00} = \frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial\widetilde{t}^2}c^2;\ \tau = \widetilde{t},\ \widetilde{x}^0 = c\widetilde{t}\right).$$

Na počátku je $\widetilde{x}^i_{(B)} = \widetilde{x}^i_{(B0)}, \left.\frac{\partial\widetilde{x}^i_{(B)}}{\partial\widetilde{t}}\right|_{\widetilde{t}=0} = 0$ členy vyšího řádu v h zanedbáváme. Pak lze snadno inegrovat:

$$\widetilde{x}^i_{(B)}(\widetilde{t}) = \left[\delta^i_j + \frac{1}{2}h_{ij}(\widetilde{t},0,0,0)\right]\widetilde{x}^j_{(B0)}.$$

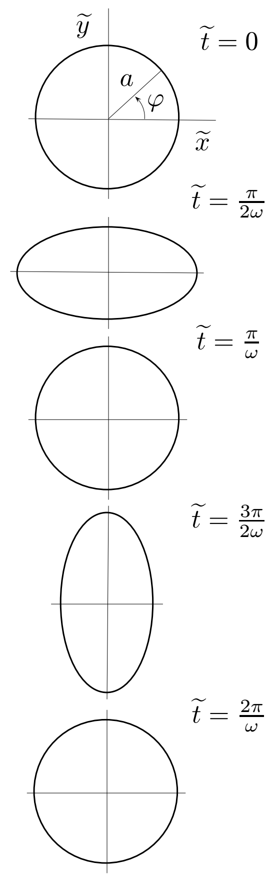
Účinek gravitační vlny vede k tomu, že B vůči A kmitá s frekvencí danou frekvencí vlny. Označíme-li v LIS souřadnice $\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}$ a vezmeme-li vlnu šířící se ve směru osy $\widetilde{z}$ s lineární polarizací h_{+ij}, dostáváme pro polohu blízkých částic v čase $\widetilde{t}$:

$$\begin{aligned}\triangle\widetilde{x}(\widetilde{t}) &= \left[1 + \frac{1}{2}h_{xx}(\widetilde{t})\right]\triangle\widetilde{x}_0,\\ \triangle\widetilde{y}(\widetilde{t}) &= \left[1 - \frac{1}{2}h_{xx}(\widetilde{t})\right]\triangle\widetilde{y}_0,\end{aligned}$$

kde $\triangle\widetilde{x}_0 = a\cos\varphi, \triangle\widetilde{y}_0 = a\sin\varphi$ jsou souřadnice v čase $\tau = 0$. Z $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ dostáváme

$$\left\{\frac{\triangle\widetilde{x}(\widetilde{t})}{a\left[1+\frac{1}{2}h_{xx}(\widetilde{t})\right]}\right\}^2 + \left\{\frac{\triangle\widetilde{y}(\widetilde{t})}{a\left[1+\frac{1}{2}h_{xx}(\widetilde{t})\right]}\right\}^2 = 1,$$

tj. rovnici elipsy o poloosách $a\left[1 \pm \frac{1}{2}h_{xx}(\widetilde{t})\right]$. Také v souřadnicích TT-kalibrace je $x = y = z = 0$ pro počátek LIS a $t = \widetilde{t} + O(h)$. Je tedy $h_{xx}(t) = Re\left[A_+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right] = (ReA_+)\cos\omega t - (ImA_+)\sin\omega t$. Předpokládáme, že $ReA_+ = 0; -ImA_+ \equiv A$. V $t = 0$ je tedy $h_{xx} = 0$ a částice leží na kružnici o poloměru a. Poloosy elipsy závisí na čase jako $a\left[1 \pm A\sin\omega t\right]$. Podobné je to při polarizaci $h_{\times ij}$ - elipsa je při své oscilaci pootočena vůči osám x, y o úhel 45^o.



V případě kruhově polarizovaných vln se testovací částice nacházejí na elipsách, které se otáčejí doprava dle smyslu polarizace.

Helicita gravitačních vln je ± 2. Obecně je helicita h v případě rovi roviných vln pole ϕ s nulovou hmotností definována tak, že při prostorových rotacích o úhel θ v rovině kolmé ke směru šíření vlny se pole transformuje pdle vztahu $\phi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h\theta}\phi$. Vidíme, že se nic nemění s vlnou při rotaci o $\pm\pi$. Je tedy $h = \pm 2$.

Gravitační vlna přenáší enegii. Tuto energii ovšem nelze lokalizovat - evidentně má nelokální chrakter. Energii a hybnost charakterizujeme souborem veličin $t_{\mu\nu}$, jež ovšem netvoří tenzor (hovoříme o pseudotenzoru energie a hybnosti gravitačního pole); $t_{\mu\nu}$ závisí na volbě souřadnic. V daném bodě lze hustotu energie i hybnosti gravitačního pole vynulovat - celková energie a hybnost jako integrály na volbě souřadnic nezávisí - asymptoticky ovšem musí být souřadnice Minkovského ($g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$). V případě slabé gravitační vlny lze použít „téměř inerciální“ systém souřadnic x^α, jenž jsem zavedli výše. Pak lze energii částečně lokalizovat - ato v rozměrech větších než vlnová délka $\lambda = 2\pi c/\omega$. Při středování přes oblast s rozměry několika vlnových délek získáme efektivní (středovaný) tenzor energie a hybnosti gravitační vlny $\langle t_{\mu\nu}\rangle$. Ten je invariantní vůči Lorentzovým transformacím $x' = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}x^\beta$ a kalibračním transformacím. (Je možno použít i Landau-Lifšicův pseudotenzor.) Speciálně v TT-kalibrai platí

$$\left\langle t^{(\mathrm{gr})}_{\mu\nu}\right\rangle = \frac{c^4}{32\pi G}\left\langle h^{\mathrm{TT}}_{jk,\mu}h^{\mathrm{TT}}_{jk,\nu}\right\rangle;$$

$< \ >$ označuje středování přes několik vlnových délek - vpravo se sčítá pro $j,k = 1,2,3$. Je-li $h_{jk} = ReA_{jk}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\rho x^\rho}$, pak

$$\left\langle t^{(\mathrm{gr})}_{\mu\nu} \right\rangle = \frac{c^4}{64\pi G} k_\mu k_\nu \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} |A_{jk}|^2 .$$

(Při středování vypadnou oscilující členy $\cos k_\alpha x^\alpha, \sin k_\alpha x^\alpha$.) Vezmeme-li výše uvedenou vlnu šířící se ve směru osy z (v TT-kalibraci), pak jednié nenulové složky jsou

$$t^{(\mathrm{gr})}_{00} = t^{(\mathrm{gr})}_{zz} = t^{(\mathrm{gr})}_{zz} = -t^{\mathrm{gr}}_{0z} = \frac{c^4}{32\pi G}\omega^2 \left(|A_+|^2 + |A_\times|^2\right).$$

7.5 Generace gravitačních vln v linearizované teorii

Omezíme-li se na případ slabých gravitačních polí, je možno problém generace gravitačních vln řešit v úzké analogii s elektrodynamikou a vyjít z retardovaných potenciálů. Retardované řešení zdrojové rovnice $\Box \overline{h}_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$ je:

$$\overline{h}^{\mu\nu}(t, x^j) = 4\frac{G}{c^4}\int_V \frac{T^{\mu\nu}\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}, \vec{x}'\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}^3x',$$

kde $|\vec{x}-\vec{x}'|^2 = \sum_{j=1}^{3}(x^j - x'^j)^2$ a $T^{\mu\nu}$ je tenzor enrgie-hybnosti zdroje vlnění. V případě „ostrovního“ systému, v němž se zdroje pohybují pomalu ve srovnání s rychlostí světla dostáváme pro část metriky reprezentující gravitační záření ve velkých vzdálenostech od zdroje, že záření je popsáno veličinami $h_{\mu\nu}$:

$$h_{0\mu} = 0, \qquad h_{ij}(t, x^\rho) = \frac{2G}{3c^4 r}\ddot{D}_{ij}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

kde $D_{ij} = \sum_A m_A \left(3x_{(A)i}x_{(A)j} - \delta_{ij} r^2_{(A)}\right)$ je kvadrupópový moment a $\dot{}$ označuje časovou derivaci. Celkový výkon kvadrupólového gravitačního záření je

$$L = \frac{G}{45c^5}\left\langle \ddot{D}_{jk}\ddot{D}_{jk} \right\rangle,$$

kde se sčítá přes j,k a $< \ >$ označuje středování přes několik period. Bipólové gravitační záření neexistuje![6] Nyní provedeme několik odhadů na případech jednoduchých zdrojů gravitačních vln. Jsou-li rychlosti zdroje malé jsou vyšší multipólové příspěvky ze záření zanedbatelné oproti kvadrupólovým.

7.5.1 Binární systém

Uvažujme zdroj gravitačního záření tvořený soustavou dvou částic (hvězd) o téže hmotnosti m, obíhajících kolem společného hmotného středu ve vzdálenosti $a/2$ Obíhají-li hvězdy v rovině (x,y) s úhlovou rychlostí ω, pak

$$x_1 = \frac{1}{2}a\cos\omega t, x_2 = -x_1; y_1 = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \sin\omega t, y_2 = -y_1.$$

Moment hybnosti $I_{ik} = \int T_{00}x'^i x'^k \mathrm{d}^3x'$ bude mít nenulové složky

$$I_{xx} = \frac{1}{h}ma^2\cos 2\omega t = -I_{yy}, I_{xy} = \frac{1}{h}ma^2 \sim 2\omega t$$

a tenzor kvadrupólového momentu $D_{ik} = 3I_{ik} - \delta_{ik}I_\rho{}^\rho$ má nenulové složky

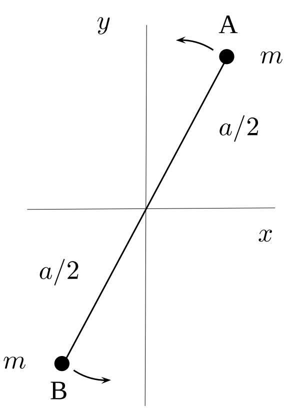
$$D_{xx} = -D_{yy} = \frac{3}{4}ma^2\cos 2\omega t, \quad D_{xy} = \frac{3}{4}ma^2\sin 2\omega t.$$

Výpočtem, který nebudeme uvádět, dostáváme, že záření ve směru osy z je

$$\begin{aligned} h^{\mathrm{TT}}_{xx} &= -h^{\mathrm{TT}}_{yy} = -2ma^2\omega^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega(t-r)}\frac{G}{c^4 r}; \\ h^{\mathrm{TT}}_{xy} &= -2\mathrm{i}ma^2\omega^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega(t-r)}\frac{G}{c^4 r}; \end{aligned}$$

zatímco ve směru osy x je

$$h^{\mathrm{TT}}_{yy} = -h^{\mathrm{TT}}_{zz} = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega(t-r)}\frac{G}{c^4 r}.$$



Frekvence gravitačního záření je dvojnásobkem orbitální frekvence. Ve směru kolmém na orbitální rovinu binárního systému je gravitační vlna kruhově polarizovaná, zatímco ve směru této roviny je polarizovaná lineárně. Po zprůměrování, přes $T = \frac{2\pi}{\omega}$ dostáváme celkový zářivý výkon

$$L = \frac{8G}{5c^5}m^2a^4\omega^6.$$

Pohyb hvězd je určován gravitací - newtonovské orbity jsou určeny rovnicí $\frac{Gm^2}{a^2} = m\omega^2\frac{a}{2}$, takže $\omega = \left(\frac{2Gm}{a^3}\right)^{1/2}; a = \left(\frac{2GM}{\omega^2}\right)^{1/3}$. Poznamenejme, želinearizovaná teorie neumožňuje zjistit korekce na tvar orbity vlivem gravitační brzdné síly. Pro zářivý výkon pak dostáváme

$$\begin{aligned} L &= \frac{64G^4m^5}{5c^5a^5} = \frac{8\cdot 2^{4/3}}{5c^5}G^{7/3}(m\omega)^{10/3} \\ &\doteq 4.84\times 10^{21}\left(\frac{m}{\mathrm{M}_\odot}\right)^{\frac{10}{3}}\left(\frac{1\mathrm{den}}{T}\right)^{\frac{10}{3}}\mathrm{W} \\ &\doteq 3.33\times 10^{54}\left(\frac{m}{\mathrm{M}_\odot}\right)^{\frac{10}{3}}\left(\frac{1\mathrm{km}}{d}\right)^{5}\mathrm{W} \end{aligned}$$

Uvžujeme-li rotující „činku“ s $m = 10^3$kg, $a = 10$m, spojenou ocelovým lanem umožňujícím $\omega \doteq 50\mathrm{s}^{-1}$, pak

[6] Protože $\vec{d}_{\mathrm{grav}} = \sum_i m_i\vec{r}_i$; $\dot{\vec{d}}_{\mathrm{grav}} = \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i = \sum_i m\vec{v}_i = \vec{P}$; $\vec{P}$ je celková hybnost systému. Víme, že platí $\vec{P}$ =konst. Je tedy $\ddot{\vec{g}}_{\mathrm{grav}} = \dot{\vec{P}} = 0$ a podle OTR dipólové záření neexistuje.

$L \sim 10^{-32}$W. Pro dvojhvězdu ι Bootes či pulsar PSR 1913+16 je je $T \sim 8$ hodin, $m \sim \mathrm{M}_\odot$ a $L \sim 10^{23}$W. (Pro zkracování periody v důsledku vyzařování gravitačních vln platí jednoduchý vztah. Jelikož $\dot{E} = -L$ a $T \sim (-E)^{-3/2}$, dostáváme po derivaci dle času: $\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{3}{2}\frac{L}{|E|}$.)

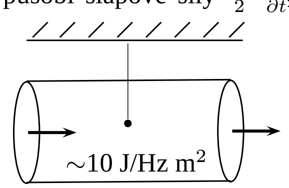
7.6 Detekce gravitačních vln

Laboratorní generace pozorovatelných vln je evidentně vyloučena ($L \sim 10^{-32}$W). Pro astrofyzikální zdroje je nutno odhadnout hustotu toku energie na Zemi. Pro tuto hustotu pro zdroje ve vzdálenosti l platí

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{L}{(4\pi l^2)} \\
&\doteq 4 \times 10^{-19} \left(\frac{m}{\mathrm{M}_\odot}\right)^{\frac{10}{3}} \left(\frac{1\mathrm{den}}{T}\right)^{\frac{10}{3}} \left(\frac{1\mathrm{kpc}}{l}\right)^{2} \mathrm{Wm}^{-2}.
\end{aligned}
$$

Horní hranici, danou dvojhvězdou ι Bootes ($l = 10$pc), dostáváme $I = 2 \times 10^{-13}\mathrm{Wm}^{-2}$. Mnohem výkonějšími zdroji však mohou být katastrofické procesy ve vesmíru - srážky pulsarů a černých děr, výbuchy supernov. Gravitační vlny pak budou krátké pulsy ($10^{-4} - 10^{-2}$s), přičemž vyzářeno bude 10^{-3} a 10^{-1} celkové klidové hmotnosti zdroje. Energie přenesená jedním pulsem bude $10^{-3} - 10\mathrm{Jm}^{-2}$.

Příchod gravitační vlny je možno zaregistrovat několika způsoby. Nejznámější jsou dva - rezonanční a interferometrický. Laserovou interferometrií se měří změny vzdálenosti volných částic způsobované průchodem gravitační vlny. „Dnes“ je připravován v hUSA projekt LIGO, jenž má být schopen měřit vzdálenost s přesností 10^{-21}. Pak bude možno měřit i průchod vlny s $h \sim 10^{-21}$. LIGO by mělo být schopno registrovat vlny přicházející z extrémě silných zdrojů - srážky pulsarů a černých děr a podobně. Rezonančního principu využívají gravitační antény Weberova typu. Na testovací těleso válec působí slapové síly $\frac{m}{2}\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2}\tilde{x}^j$, jež se mění (periodicky).

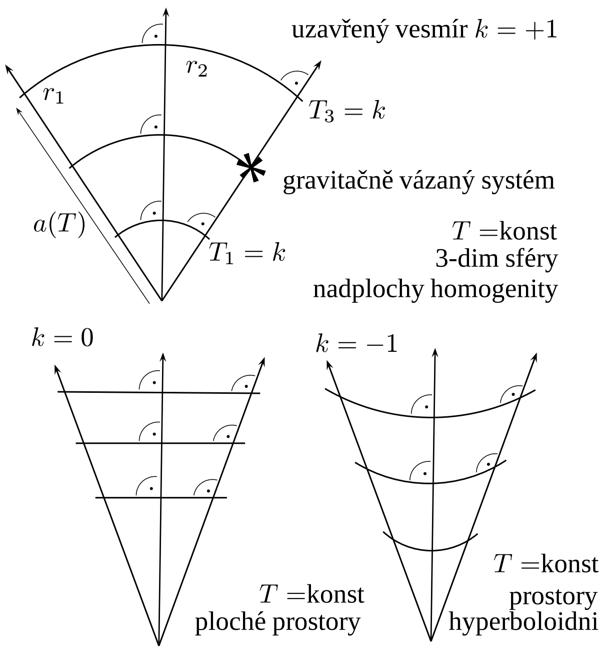


V důsledku těchto sil se těleso rozkmitá. Pokud se frekvence dopadající gravitační vlny shoduje s frekvencí vlastních kmitů tělesa, pak při rezonanci může amplituda kmitů tělesa výrazně převyšovat hodnoty platné pro volné částice. Weberovy dva válce byly naladěny na 1660Hz a m2ly citlivost $\sim 10\mathrm{Wm}^{-2}$.

Kapitola 8

Standardní relativistická kosmologie

Evoluci vyvýjejícího se vesmíru určují Einsteinovy gravitační rovnice, „ostatní fyzika“ nám dáva stavovou rovnici hmoty ve vesmíru. Od kosmického času $T = 10^{-3}$s ($\sim$ 100GeV) je to fyzika ověřitelná v pozemských laboratořích. Od $T \sim 10^{-2}$s dolů se „laboratoří“ stává samotný big bang.



Jak plyne z pozorování, vesmír je na velkých škálách (>100 Mpc) homogení a izotropní. Na základě **kosmologického principu**, jenž praví, že všechna místa ve vesmíru jsou rovnocená, předpokládáme, že se takto jeví všem typickým (souputujícím) pozorovatelům. Tito pozorovatelé jsou v daném místě v klidu vůči prostoročasu. Sféricky symetrický (izotropní) a zároveň homogení prostoročas popisujeme známou Friedmanovou–Robertsonovou–Walkerovou (FRW) metrikou. V souputujících souřadnicích (T, r, θ, φ) má příslušný délkový element tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}T^2 + a^2(T)\Big[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi)\Big],$$

kde skalární křivost k nabývá hodnot: $k = 1$ pro uzavřený vesmír, $k = 0$ pro plochý vesmír a $k = -1$ pro otevřený vesmír. Kosmický čas T je synchronizovaný vlastní čas souputujících pozorovatelů. Škálový faktor $a(T)$ popisuje časový vývoj celého vesmíru. Jeho chování v závislosti na kosmickém čase T určíme z Einsteinových rovnic

$$G^{\mu}{}_{\nu} = 8\pi T^{\mu}{}_{\nu}, \tag{8.1}$$

kde $T^{\mu}{}_{\nu}$ je tenzor energie-hybnosti celkové výplně vesmíru a $G^{\mu}{}_{\nu}$ je Einsteinův tenzor získaný z FRW metriky.

Nenulové složky Einsteinova tenzoru, spočtené z FRW metriky, jsou

$$\begin{aligned} G^0{}_0 &= -3\Big[\Big(\frac{\dot a}{a}\Big)^2 + \frac{k}{a^2}\Big], \\ G^1{}_1 = G^2{}_2 = G^3{}_3 &= -\Big[2\frac{\ddot a}{a} + \Big(\frac{\dot a}{a}\Big)^2 + \frac{k}{a^2}\Big]. \end{aligned}$$

Tenzor dokonalé kapaliny popisující rozložení hmoty ve vesmíru má v klidovém systému souputujících pozorovatelů diagonální tvar

$$T^{\mu}{}_{\nu} = (p+\rho)U^{\mu}U_{\nu} + p\,g^{\mu}{}_{\nu},$$

kde ρ je vlastní hustota hmoty (energie), p je tlak a U^{μ} je 4-rychlost kosmické tekutiny, pro souputujícího pozorovatele $U^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$. Platí tedy

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \mathrm{diag}(\rho, -p, -p, -p),$$

tlak se šíří všemi směry stejně. Předpokládejme, že ideální tekutina splňuje barytropicku stavovou rovnici

$$p = w\rho.$$

Z Einsteinových rovnic (8.1) pro složky „0-0“ a „1-1“ plynou takzvané Friedmanovy rovnice

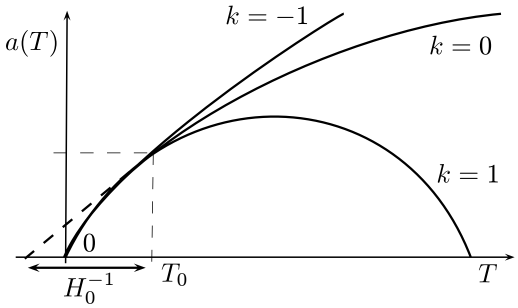
$$3\frac{\dot a^2 + k}{a^2} = 8\pi\rho, \tag{8.2}$$

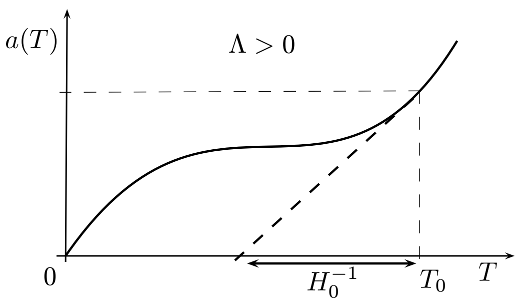
$$-2\frac{\ddot a}{a^2} - \frac{\dot a^2 + k}{a^2} = 8\pi p. \tag{8.3}$$

Vložíme-li (8.2) do (8.3) dostáváme

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p).$$

Efektivní gravitační energie je tedy $\rho+3p$, tlak také přispívá ke gravitaci. Dále je z této rovnice zřejmé, že pro $\rho+3p<0$ dochází k urychlování expanze vesmíru. Nic nebrání tomu, abychom nastavili hodnoty škálového faktoru jako $a(0)=0$ na počátku vesmíru a $a(T_0)=1$ dnes.





Platí-li zákon zachování $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ pro ideální kapalinu, můžeme jej v případě FRW metriky napsat jako

$$\dot\rho+3(\rho+p)\frac{\dot a}{a}=0.$$

Pro různé stavové rovnice (8) dostáváme z (8) různé závislosti hustoty na škálovém faktoru $a(T)$.

název	stavová rovnice	závislost na $a(T)$	vliv na $a(T)$
záření	$p_r=1/3\rho_r$	$\rho_r\sim a^{-4}$	$a\sim T^{1/2}$
prach	$p_m=0$	$\rho_m\sim a^{-3}$	$a\sim T^{2/3}$
„křivost“	$p_k=-1/3\rho_k$	$\rho_k\sim a^{-2}$	$a\sim T$
vakuum	$p_\Lambda=-\rho_\Lambda$	$\rho_\Lambda=\text{konst.}$	$a\sim\exp(T)$

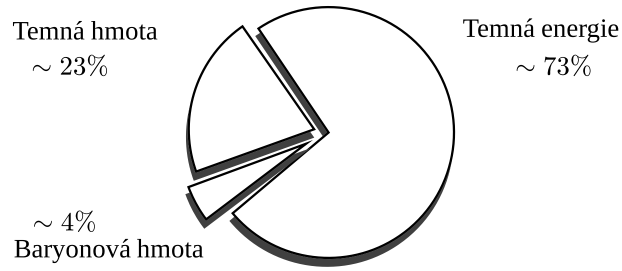
Různé typy dokonalé kapaliny jako výplně vesmíru a jejich charakteristiky.

Ve vesmíru můžeme uvažovat více různých komponent společně, každou s příslušnou stavovou rovnicí. Podle pozorování[1] je dnes vesmír tvořen temnou energií „DE“ a temnou hmotou „DM“. Pak platí

$$T^{\mu}{}_{\nu}=T^{\mu}{}_{\nu(\mathrm{DE})}+T^{\mu}{}_{\nu(\mathrm{DM})},$$

konkrétně $\rho=\rho_{\mathrm{DE}}+\rho_{\mathrm{DM}}$ a $p=p_{\mathrm{DE}}+p_{\mathrm{DM}}$.

[1] dynamika galaxií a kup galaxií, supernovy typu Ia, fluktuace teploty reliktního záření



Je zajímavé, že věci o nichž toho mnoho nevíme, tvoří většinu vesmíru.

Pro rychlost vzdalování kosmických objektů, v důsledku expanze vesmíru, platí Hubbleův zákon $v=H_0d$, kde H_0 je dnešní hodnota Hubblova parametru definovaného jako

$$H=\frac{\dot a}{a}\,.$$

Rychlost vzdalování galaxií je tedy $v=H_0\cdot l$ a $H_0=100h\mathrm{kms}^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1}$, kde $0.4<h<1.0$ (dáno observačními omezeními). Hubblův čas $H_0^{-1}=9.78h^{-1}\times10^9$ let charakterizuje věk vesmíru.

Pokud tedy vesmír expanduje, vlnová délka záření vzdalujicích se objektů λ_e bude vlivem Dopplerova jevu posunuta směrem k rudému konci spektra. Tento jev nám umožnuje definovat rudý posuv z vztahem

$$z=\frac{\lambda_o-\lambda_e}{\lambda_e}=\frac{a(T_o)}{a(T_e)}-1,$$

kde λ_o je námi pozorovaná vlnová délka záření.

Příloha A

Dodatky

A.1 Killingovy vektory

Předpokládáme, že v dané geomrtrii existuje vektorové pole ξ^μ takové, že pokud je libovolná množina bodů přemístěna o $\xi^\mu \, \mathrm{d}\lambda$ (kde $\mathrm{d}\lambda$ je malé číslo), pak všechny vzdálenosti zůstávají nezměněné. Pak ξ^μ je polem Killingova vektoru dan0 geometrie. Toto pole vyjadřuje symetrii geometrie a splňuje tzv. Killingovu rovnici

$$\xi_{(\alpha;\beta)} \equiv \frac{1}{2} \left(\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} \right) = 0.$$

A.2 Pohybové konstanty dané Killingovy vektory

Je-li $\xi^\mu(x^\alpha)$ pole Killingova vektoru a u^μ je tečný vektor ke geodetice, pak $\xi^\mu u_\mu$ je konstantí podél daé geodetiky, tj. je to pohybová konstanta. Změna $\xi^\mu u_\mu$ podél geodetiky je:

$$\nabla_u (u \cdot \xi) = (\nabla_u u) \cdot \xi + u \cdot (\nabla_u \xi),$$

$u =\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}; u^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}$. Platí $\nabla_u u = 0$ jelikož jde o geodetiku; $\nabla_u u \equiv u^\beta u_{\alpha;\beta}$

A.3 Rovnice geodetické deviace

Literatura

[1] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. Gravitation. Freeman, San Francisco, 1973.

[2] Øyvind Grøn, Sigbjørn Hervik. S Einstein's Theory of Relativity

[3] B. W. Carroll, D. A. Ostlie. An Introduction to Modern Astrophysics. Addison-Wesley, Ogden, 1996.