

Martin Kološ

Pohyb strun v poli kompaktních objektů

**String-loop dynamics in spacetimes around
compact objects**

DIZERTAČNÍ PRÁCE

**Slezská univerzita v Opavě, Filozoficko-přírodovědecká fakulta
Ústav fyziky**



Pohyb strun v poli kompaktních objektů

**String-loop dynamics in spacetimes around
compact objects**

DIZERTAČNÍ PRÁCE

**Vedoucí: prof. RNDr. Zdeněk Stuchlík, CSc.
Konzultant: RNDr. Stanislav Hledík, Ph.D.**

Opava 2013

Martin Kološ

Anotace

Cílem předložené práce je prozkoumat dynamiku kruhové relativistické struny se skalárním polem v poli kompaktních objektů. Jsou uvedeny i možné astrofyzikální aplikace modelu oscilující strunové smyčky.

Annotation

The work will be focused on current-carrying string-loop dynamics in spacetimes around compact objects. Possible astrophysical application of the oscillating string loop are also presented.

Klíčová slova

kruhová struna — černá díra — nahá singularita — urychlení jetů — chaos a regularita — kvaziperiodické oscilace

Key words

string loop — black hole — naked singularity — jet acceleration — chaos and regularity — quasiperiodic oscillations

Poděkování

Tato disertační práce je shrnutím našeho dosavadního společného výzkumu s prof. RNDr. Zdeněkem Stuchlíkem, CSc, rád bych mu na tomto místě poděkoval za odborné vedení a cenné rady.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem uvedenou disertační práci vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Zdeňka Stuchlíka, CSc, a že veškeré prameny uvádím v seznamu použité literatury. Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Ústřední knihovně SU.

V Opavě dne 26. května 2013

Martin Kološ

Obsah

Úvod	3
Kapitola 1. Kruhá struna se skalárním polem	7
1.1. Hamiltonovský formalismus a integrály pohybu	10
1.2. Energetická hranice pro pohyb struny	11
Kapitola 2. Fyzikální interpretace v plochem prostoročase	13
2.1. Kruhá struna se skalárním polem	13
2.2. Vliv elektromagnetického pole na dynamiku struny	16
Kapitola 3. Kruhá struna v okolí kompaktního objektu	21
3.1. Kruhá struna ve Schwarzschildově geometrii	21
3.2. Kruhá struna v Kerrově geometrii	25
3.3. Vliv kosmologické konstanty	39
Kapitola 4. Aplikace modelu - jety, chaos a QPOs	43
4.1. Urychlení kruhové struny podél osy y	43
4.2. Chaos a regularita	49
4.3. Malé oscilace struny a QPOs	53
Závěr	57
Literatura	59
Přílohy	63

Úvod

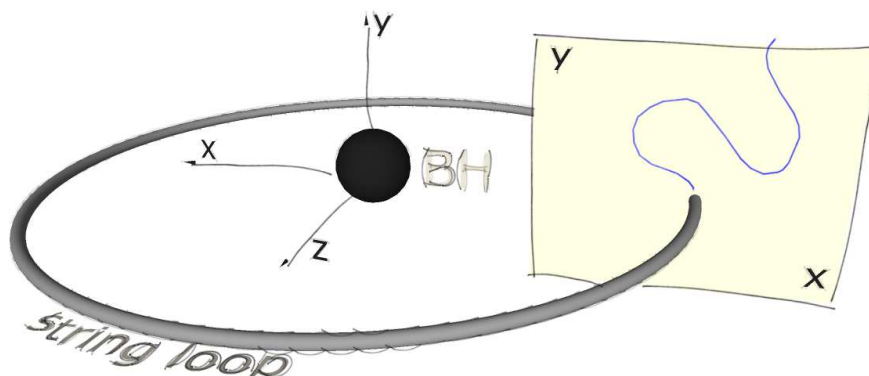
Akrece (pohlcování) hmoty černou dírou je významným zdrojem záření ve Vesmíru - na rozdíl od termionukleárních reakcí probíhajících ve hvězdách, kde účinnost přeměny je menší než 1%, umožňuje akrece využít až 42% z klidové energie hmoty. Je proto důležité teoreticky studovat možné procesy v okolí černých děr, přesto (nebo právě proto) že napozorovaných údajů máme nepoměrně méně než například u hvězd.

V okolí černé díry, kde hraje jak gravitační tak i elektromagnetické pole důležitou roli, používáme pro popis chování akrečního disku relativistickou magnetohydrodynamiku (RMHD). Jak ukázal V. S. Semenov s kolegy [1], existuje za určitých podmínek formální ekvivalence mezi rovnicemi RMHD a rovnicemi pro chování relativistické struny s tenzí; tento poznatek aplikovali v modelu lineární struny v poli černé díry použitím pro zkoumání chování magnetických silotrubic orientovaných rovnoběžně s osou rotace [2].

Supravodivá struna byla zavedena E. Wittenem [3], jakožto topologický defekt vznikající v raných fázích evoluce Vesmíru, dále byla tato myšlenka rozvíjena různými autory, viz přehled [4]. Model axiálně symetrické kruhové struny se skalárním polem zkoumal A. L. Laresen v práci [5], kde aplikoval Hamiltonovský formalismus na odvození pohybových rovnic a demonstroval chaotičnost dynamiky kruhové struny v poli černé díry [6, 7, 8].

V průkopnickém článku [9] využili T. Jacobson a T. P. Sotiriou formalismus axiálně symetrické kruhové struny pro model pohybu magnetických silotrubic v plasmatu za účelem vysvětlení tvorby a urychlení jetů (výtrysků) v okolí osy rotace černé díry. V článku [9] prezentované maximální urychlení kruhové struny $v \sim 0.39c$ se ovšem ukázalo jako nedostatečné pro vysvětlení vysoce relativistických jetů pozorovaných v aktivních galaktických jádrech

Tato disertační práce je shrnutím našeho dosavadního společného výzkumu s prof. Zdeněkem Stuchlíkem, v oblasti dynamiky kruhových strun v poli kompaktních objektů. Jednotlivé články, zveřejněné v impaktovaných časopisech, jsou uvedeny jako příloha na konci této práce. V prvním článku [10] jsme navázali na model zavedený Jacobsonem a Sotiriouem [9] a prozkoumali vliv repulzivní kosmologické konstanty na dynamiku kruhové struny. V další práci [11] byla podrobně prozkoumána transmutace struny - mechanismus odpovědný za urychlení struny podél osy symetrie. Bylo ukázáno, že je možné dosáhnout urychlení na ultrarelativistické rychlosti $v \sim c$ a to dokonce i v poli nerotující Schwarzschildovy černé díry. Pohyb struny v poli černých děr a nahých singularit obsahujících



Obrázek 1. Schématický obrázek kruhové struny pohybující se v okolí černé díry. Protože předpokládáme axiální symetrii, je možné vyšetřovat a zobrazit pohyb celé struny pouze pomocí jednoho bodu v rovině $x - y$.

přídavný člen v podobě tzv. přílivového náboje z bránových modelů Vesmíru, byl vyšetřován v našem článku [12], kde jsme se také začali věnovat přechodu dynamiky struny z regulárního do chaotického režimu v blízkosti rovnovážného bodu. V současné době jsme klasifikovali pohyb kruhové struny v poli rotujících černých děr a nahých singularit popsanych Kerrovou metrikou [13]. Zde se nám podařilo vysvětlit problém „fokusace“ trajektorie struny [9], ukázat závislost urychlení kruhové struny na rotačním parametru a a odvodit analytický tvar rovnic pro výpočet frekvencí malých oscilací struny kolem rovnovážné polohy. Toto téma budeme dále dále rozvíjet v připravovaném článku zaměřeného na astrofyzikální důsledky malých oscilací struny a kvaziperiodických oscilací (QPOs) pozorovaných na vysokých frekvencích v poli černých děr a neutronových hvězd v binárních systémech.

V průběhu naší práce jsme navázali spolupráci s kolegy prof. B. Ahmedovem a A. Tursunovem s kterými pracujeme na započtení vlivu elektromagnetického pole na dynamiku nabitě kruhové struny [14].

V této práci v kapitole 1. zavedeme akci pro strunu nesoucí skalární pole, rozvineme Hamiltonovský formalismus a spočteme příslušné rovnice pohybu. Poté ve 2. kapitole ukážeme, jak se kruhová struna nesoucí i elektrické náboje bude pohybovat v plochem prostoročase a pokusíme se její dynamiku fyzikálně interpretovat. V následující 3. kapitole vyšetříme a klasifikujeme pohyb kruhové struny z hlediska její energie pro různé typy černých děr a nahých singularit. Ukážeme jak na kruhovou strunu působí gravitace a kosmologická konstanta (kosmická repulze). V poslední 4. kapitole se pokusíme aplikovat model kruhové struny k vysvětlení ultra relativistických rychlostí jetů, ukážeme nárůst chaotičnosti systému v závislosti na vzrůstající energii v okolí stabilní rovnovážné pozice a dále pomocí malých oscilací prozkoumáme možnou souvislost s efektem QPOs.

V celém textu používáme geometrické jednotky $c = G = 1$ a v metrice signaturu $(-1, +1, +1, +1)$. Při přepočtu používáme různé kombinace $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}^2$ a $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$ tak, abychom dostali jednotky daných veličin.

Příslušné numerické výpočty trajektorií kruhových strun byly provedeny s chybou menší než 10^{-7} pro jednotlivé trajektorie a s chybou menší než 10^{-4} pokud bylo nutné spočítat velké množství trajektorií. Veškeré kódy jsou napsány v programu *Mathematica*[®].

Kapitola 1

Kruhová struna se skalárním polem

Budeme uvažovat pohyb struny ve stacionárním axiálně symetrickém prostoročase

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2. \quad (1.1)$$

Sférické souřadnice r, θ, ϕ jsou vztaženy ke kartézským souřadnicím¹ x, y, z vztahy

$$x = \sin(\theta) \cos(\phi), \quad y = r \cos(\theta), \quad z = r \sin(\theta) \sin(\phi), \quad (1.2)$$

kde pro radiální souřadnici platí $0 \leq r < \infty$, pro azimutální $0 \leq \phi < 2\pi$ a pro polární $0 \leq \theta \leq \pi$. Ekvatoriální rovina je určena vztahy $\theta = \pi/2$ nebo $y = 0$, viz obr. 1.1.

Vývoj struny je zcela určen její světoplochou (ekvivalent světočáry) se souřadnicemi σ^a , kde $a = 0, 1$. Tato 2D světoplocha je vložena do metriky (1.1) pomocí zobrazení přiřazujícího bodům struny prostoročasové souřadnice, $X^\alpha(\sigma^a)$ kde $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Indukovaná metrika světoplochy je tedy

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} X_{|a}^\alpha X_{|b}^\beta, \quad (1.3)$$

kde jsme označili $\square_{|a} = \partial\square/\partial a$. Axiálně symetrická metrika (1.1) je stacionární pro $g_{t\phi} > 0$ - metrika nezávisí na souřadnicovém čase t , ale není statická. Kruhovou strunu vložíme z důvodu symetrie tak, aby souřadnice světoplochy σ odpovídala souřadnici ϕ metriky (1.1) viz obr. 1.1

$$X^\alpha(\tau, \sigma) = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \sigma + f(\tau)); \quad (1.4)$$

τ je pak parametr charakterizující evoluci struny. Pro souřadnice struny (1.4) platí

$$\dot{X}^\alpha = X_{|\tau}^\alpha = (t_{|\tau}, r_{|\tau}, \theta_{|\tau}, f_{|\tau}), \quad X'^\alpha = X_{|\sigma}^\alpha = (0, 0, 0, 1). \quad (1.5)$$

¹ Netradiční zavedení kartézských souřadnic je použito pro zachování kompatibility s předchozími pracemi.

Funkce $f(\tau)$ je dále určena jako

$$f|_{\tau} = -(g_{\phi\phi}/g_{tt})t|_{\tau}. \quad (1.6)$$

Budeme-li uvažovat strunu s tenzí $\mu > 0$ a skalárním polem φ pak akce S a Lagrangián \mathcal{L} jsou

$$S = \int \mathcal{L} d\sigma d\tau, \quad \mathcal{L} = -\sqrt{-h} \left(\mu + h^{ab} \varphi|_a \varphi|_b \right). \quad (1.7)$$

kde $\varphi|_a = j_a$ určuje proud na struně. Proud generuje moment hybnosti struny a jemu odpovídající odstředivé síly. Takováto akce struny je inspirována teorií supravodivých strun [3] jakožto topologických defektů.

Variace akce (1.7) podle indukované metriky h_{ab} vede na tenzor hustoty energie hybnosti na světlošle ve tvaru

$$\Sigma^{ab} = \sqrt{-h} \left(2j^a j^b - (\mu + j^2) h^{ab} \right), \quad j^a = h^{ab} j_b, \quad j^2 = h^{ab} j_a j_b. \quad (1.8)$$

Jakákoli 2D metrika, tedy i světlošle struny, je konformně plochá a lze ji napsat jako

$$h_{ab} = K^2 \eta_{ab}, \quad (1.9)$$

kde η_{ab} je plochá metrika a K je skalární funkce. Zavedeme-li souřadnice $\sigma^a = (\tau, \sigma)$ tak, aby platilo $\eta_{\tau\sigma} = 0$ a $\eta_{\tau\tau} = -\eta_{\sigma\sigma} = -1$ je podmínka konformní plochosti ekvivalentní

$$h_{\tau\sigma} = 0, \quad h_{\tau\tau} + h_{\sigma\sigma} = 0, \quad \sqrt{-h} h^{ab} = \eta^{ab}. \quad (1.10)$$

Konformní faktor K je pak určen vztahem

$$h_{\sigma\sigma} = K^2 \eta_{\sigma\sigma} = g_{\phi\phi}. \quad (1.11)$$

Variace akce (1.7) podle skalárního pole φ vede na rovnici

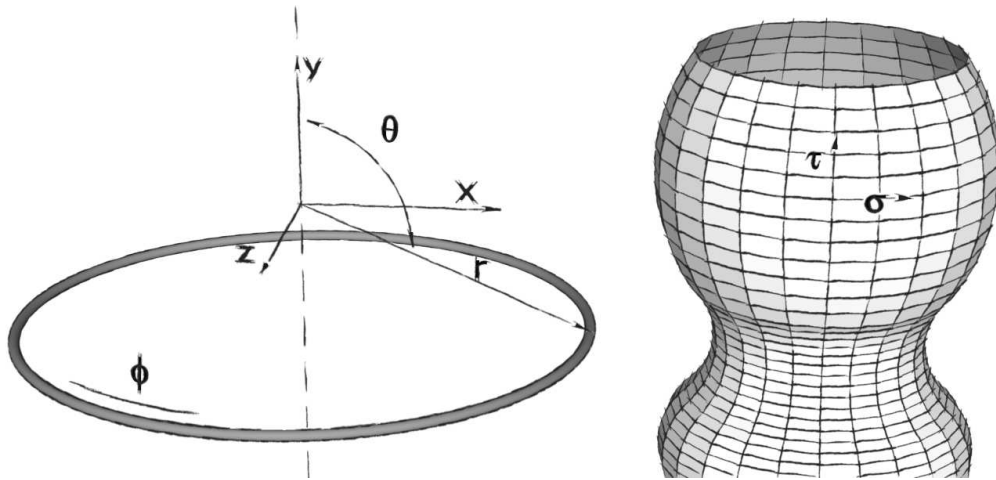
$$(\sqrt{-h} h^{ab} \varphi|_a)|_b = 0, \quad (1.12)$$

v konformní kalibraci (1.9) je pak rovnice (1.12) pro vývoj skalárního pole

$$\varphi|_{\tau\tau} - \varphi|_{\sigma\sigma} = 0. \quad (1.13)$$

Předpoklad axiální symetrie implikuje nezávislost proudu na souřadnici σ , neboli $j_{a|\sigma} = 0$. Použijeme-li rovnici pro vývoj skalárního pole (1.13) vidíme, že skalární pole φ se dá vyjádřit pomocí konstant j_{σ} a j_{τ} jako

$$\varphi = j_{\sigma} \sigma + j_{\tau} \tau. \quad (1.14)$$



Obrázek 1.1. Sférické souřadnice r, θ, ϕ a jejich vztah ke kartézským souřadnicím x, y, z . Kruhová struna při svém pohybu vykresluje 2D světloplochu (vpravo), popsanou souřadnicemi τ, σ . Tuto světloplochu jsme do 4D prostoročasu vložili tak, že jsme identifikovali souřadnici světloplochy σ s azimutální souřadnici prostoročasu ϕ .

Zavedeme-li

$$J^2 \equiv j_\sigma^2 + j_\tau^2, \quad \omega \equiv -j_\sigma/j_\tau, \quad (1.15)$$

lze vyjádřit komponenty hustoty tenzoru energie hybnosti Σ^{ab} (1.8) ve tvaru

$$\Sigma^{\tau\tau} = \frac{J^2}{g_{\phi\phi}} + \mu, \quad \Sigma^{\sigma\sigma} = \frac{J^2}{g_{\phi\phi}} - \mu, \quad \Sigma^{\sigma\tau} = \frac{-2j_\tau j_\sigma}{g_{\phi\phi}} = \frac{2\omega J^2}{g_{\phi\phi}(1 + \omega^2)}. \quad (1.16)$$

Dynamika kruhové struny závisí na proudu skrze tenzor energie hybnosti Σ^{ab} , tato závislost je vyjádřena pomocí parametrů J^2 a ω . Minusové znaménko ve členu ω je zvoleno proto, aby pozitivní moment hybnosti struny odpovídal kladnému parametru ω .

Variace akce (1.7) podle souřadnice X^μ dává rovnice pohybu

$$\frac{D}{d\tau} P_\mu^{(\tau)} + \frac{D}{d\sigma} P_\mu^{(\sigma)} = P_{\mu|\tau}^{(\tau)} - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha P_\alpha^{(\tau)} X_{|\tau}^\beta + P_{\mu|\sigma}^{(\sigma)} - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha P_\alpha^{(\sigma)} X_{|\sigma}^\beta = 0 \quad (1.17)$$

kde jsme použili definici absolutní derivace a zavedli Christoffelovy symboly

$$\Gamma_{\mu\beta}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\gamma\mu|\beta} + g_{\gamma\beta|\mu} - g_{\mu\beta|\gamma}). \quad (1.18)$$

Hybnosti kruhové struny jsou definovány jako

$$P_\mu^{(\tau)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = \Sigma^{\tau a} g_{\mu\lambda} X_{|a}^\lambda, \quad P_\mu^{(\sigma)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = \Sigma^{\sigma a} g_{\mu\lambda} X_{|a}^\lambda, \quad (1.19)$$

a rovnice pohybu (1.17) mohou být přepsány do podoby

$$\left(\Sigma^{ab} g_{\mu\lambda} X_{|a}^\lambda \right)_{|b} - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Sigma^{ab} g_{\alpha\lambda} X_{|a}^\lambda X_{|b}^\beta = 0. \quad (1.20)$$

S použitím identit

$$g^{\beta\lambda} \Gamma_{\mu\beta}^\kappa P_\kappa P_\lambda = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta|\mu} P^\alpha P^\beta = -\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}{}_{|\mu} P_\kappa P_\lambda \quad (1.21)$$

mohou být rovnice (1.20) vyjádřeny ve tvaru

$$\left(\Sigma^{ab} g_{\mu\lambda} X_{|a}^\lambda \right)_{|b} - \frac{1}{2} \Sigma^{ab} g_{\lambda\beta|\mu} X_{|a}^\lambda X_{|b}^\beta = 0, \quad (1.22)$$

což je rovnice (6) z článku [9] - pouze s jinými indexy.

Zavedeme afinní parametr ζ , který je vztažen k souřadnici τ na světlošle relací

$$d\tau = \Sigma^{\tau\tau} d\zeta. \quad (1.23)$$

Rovnice pohybu (1.22) pro dynamiku struny pak přejdou na tvar

$$\frac{dP_\mu}{d\zeta} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}{}_{|\mu} P_\alpha P_\beta - \frac{1}{2} [g_{\phi\phi}(\Sigma^{\tau\tau})^2]_{|\mu} + \frac{1}{2} [g_{\phi\phi}(\Sigma^{\tau\sigma})^2]_{|\mu}, \quad (1.24)$$

s klasickými čtyřhybnostmi definovanými jako (1.19)

$$P_\mu \equiv P_\mu^{(\tau)} = \Sigma^{\tau\tau} g_{\mu\lambda} \dot{X}^\lambda + \Sigma^{\tau\sigma} g_{\mu\lambda} X'^\lambda. \quad (1.25)$$

1.1. Hamiltonovský formalismus a integrály pohybu

Pomocí Hamilton—Jacobiho rovnic

$$\frac{dX^\mu}{d\zeta} = \frac{\partial H}{\partial P_\mu}, \quad \frac{dP_\mu}{d\zeta} = -\frac{\partial H}{\partial X^\mu}, \quad (1.26)$$

vidíme, že rovnice (1.24-1.25) odpovídají Hamiltoniánu odvozenému již v [6]

$$H = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta + \frac{1}{2} g_{\phi\phi} [(\Sigma^{\tau\tau})^2 - (\Sigma^{\tau\sigma})^2], \quad (1.27)$$

kde α, β jsou souřadnice t, r, θ, ϕ .

Metrika (1.1) nezávisí na souřadnici t (stacionarita) ani na ϕ (axiální symetrie). Tyto symetrie implikují zachovávací se veličiny - energii a moment hybnosti struny. Pro energii struny E platí

$$\begin{aligned} -E &= P_t = g_{tt} \Sigma^{\tau\tau} X_{|\tau}^t + g_{t\phi} (\Sigma^{\tau\tau} X_{|\tau}^\phi + \Sigma^{\tau\sigma} X_{|\sigma}^\phi) \\ &= \Sigma^{\tau\tau} (g_{tt} - g_{t\phi}^2 / g_{\phi\phi}) t_{|\tau} + g_{t\phi} \Sigma^{\sigma\tau}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Vůči pozorovatelům s nulovým momentem hybnosti (ZAMO) [16] v Kerrově prostoročasu, nebo vůči statickým pozorovatelům v případě Schwarzschildova prostoročasu, struna nerotuje (1.4). Přesto má moment hybnosti, generovaný skalárním polem φ na struně

$$\begin{aligned} L &= P_\phi = g_{\phi\alpha} P^\alpha = g_{\phi t} \Sigma^{\tau\tau} X_{|\tau}^t + g_{\phi\phi} (\Sigma^{\tau\tau} X_{|\tau}^\phi + \Sigma^{\tau\sigma} X_{|\sigma}^\phi) \\ &= g_{\phi\phi} \Sigma^{\sigma\tau} = -2j_\tau j_\sigma. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Standardní relativistická kruhové struna bez skalárního pole $\varphi = 0$, tzv. Nambu—Gotova struna, nemá žádný moment hybnosti.

Použijeme-li nalezené konstanty pohybu (1.28-1.29), můžeme přepsat Hamiltonián (1.27) pro pohyb struny v metrice (1.1) jako

$$H = \frac{1}{2g_{rr}} P_r^2 + \frac{1}{2g_{\theta\theta}} P_\theta^2 + \frac{1}{2} g_{\phi\phi} (\Sigma^{\tau\tau})^2 + \frac{g_{\phi\phi} (E + g_{t\phi} \Sigma^{\sigma\tau})^2}{2(g_{tt} g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2)}, \quad (1.30)$$

pro dynamické proměnné r, θ, P_r, P_θ .

1.2. Energetická hranice pro pohyb struny

Pohybové rovnice (1.26) jsou pro obecnou metriku (1.1) poměrně složité. Vyplatí se proto předem vyšetřovat přípustné trajektorie kruhové struny z hlediska její energie E .

Pohyb struny se zastaví, pokud jsou v určitém bodě trajektorie struny hybnosti nulové $P^r = P^\theta = 0$. Pak je i kinetická energie nulová a pohyb struny se v bodě na okamžik zastaví; množina všech těchto bodů tvoří nepřekročitelnou hranici pro pohyb struny. Použijeme-li podmínku $H = 0$, danou invariancí akce (1.7) vůči reparameterizaci, můžeme z Hamiltoniánu (1.30) vyjádřit energii struny v místě hranice pohybu jako

$$E = E_b(r, \theta) \equiv \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt} g_{\phi\phi}} \Sigma^{\tau\tau} - g_{t\phi} \Sigma^{\sigma\tau}, \quad (1.31)$$

kde jsme zavedli funkci energetická hranice pohybu $E_b(r, \theta)$. Struna nemůže svou hranici překročit - je omezena vlastní energií.

Je výhodné přeskálovat energii $E \rightarrow E/\mu$ a proud $J \rightarrow J/\sqrt{\mu}$ struny, zbavíme se tak přímé závislosti na tenzi struny $\mu > 0$.²

Chování funkce hranice pohybu $E_b(r, \theta)$ má veliký význam pro klasifikaci možného vývoje struny - například pokud je hranice v některém směru otevřená, struna může tímto směrem utéci. Dále, pokud například existují ve funkci $E_b(r, \theta)$

² Toto přeskálování je ekvivalentní zvolení $\mu = 1$ v příslušných rovnicích (1.16), (1.31).

minima, pak může být struna s malou energií v tomto minimu polapena. Stationární body funkce $E_b(r, \theta)$ jsou určeny podmínkou

$$(E_b)'_r = 0, \quad (1.32)$$

$$(E_b)'_\theta = 0. \quad (1.33)$$

Notace $(\)'_m$ značí derivaci podle souřadnice m . K vyšetření, zda-li je stationární bod (r_e, θ_e) minimem, nebo maximem funkce $E_b(r, \theta)$ musíme použít podmínky stability

$$[(E_b)''_{rr}](r_e, \theta_e) < 0 \text{ (max)} \quad > 0 \text{ (min)} \quad (1.34)$$

$$[(E_b)''_{rr}(E_b)''_{\theta\theta} - (E_b)''_{r\theta}(E_b)''_{\theta r}](r_e, \theta_e) > 0. \quad (1.35)$$

Extrém funkce $E_b(r, \theta)$ může existovat v bodech stationárních, nebo tam, kde příslušné derivace funkce $E_b(r, \theta)$ neexistují.

Kapitola 2

Fyzikální interpretace v plochém prostoročase

Plochý prostoročas, popsaný Minkowského metrikou, má nejvyšší možnou míru symetrie. Pokud nebude zavedeno vnější pole, jež tuto symetrii poruší, bude dynamika kruhové struny jednoduchá a pohyb regulární.

2.1. Kruhová struna se skalárním polem

Minkowského metrika ve válcových souřadnicích t, x, y, ϕ , viz obr. 1.1, má nenulové koeficienty

$$g_{tt} = -1, \quad g_{xx} = 1, \quad g_{yy} = 1, \quad g_{\phi\phi} = x^2. \quad (2.1)$$

Pro dynamické proměnné x, y, P_x, P_y můžeme vyjádřit Hamiltonián (1.30) jako

$$H = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}P_y^2 - \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}x^2(\Sigma^{\tau\tau})^2, \quad (2.2)$$

kde jsme využili integrálů pohybu energie E (1.28) a momentu hybnosti L (1.29). Z první sady Hamiltonovských pohybových rovnic (1.26) získáme vztahy

$$P_x = P^x = dx/d\zeta = \dot{x}, \quad P_y = P^y = dy/d\zeta = \dot{y}. \quad (2.3)$$

Můžeme vyjádřit i druhou sadu Hamiltonovských rovnic (1.26) pro pohyb struny

$$\ddot{x} = \frac{J^4}{x^3} - \mu^2 x, \quad \ddot{y} = \text{konst.} \quad (2.4)$$

Pravou část první rovnice interpretujeme jako působení dvou opačných sil na element kruhové struny ve směru x :

- *Odstředivá síla* $F_o = J^4/x^3$, vytvořená skalárním polem na struně. Tato síla, nepřímo úměrná třetí mocnině poloměru struny (nejsilnější pro malé poloměry), se snaží kruhovou strunu roztáhnout.

- Síla tenze struny $F_t = -\mu^2 x$, lineárně závislá na poloměru kruhové struny, snaží se jej smrštít do bodu. Tenze struny μ není závislá na roztažení x - struna je dokonale pružná.

Hamiltonián (2.2) nezávisí na souřadnici y , a proto se příslušná složka čtyř hybnosti P_y stává konstantou pohybu. Ve směru y na strunu nepůsobí žádné síly a pohyb podél osy y je zcela volný.

Analytické řešení pohybových rovnic pro pohyb kruhové struny v plochem prostoročase (2.4) můžeme vyjádřit jako

$$x^2(\zeta) = \frac{1}{2} \left[x_0^2 + \frac{J^4}{x_0^2} + \dot{x}_0^2 + 2x_0\dot{x}_0 \sin(2\zeta) + \left(x_0^2 - \frac{J^4}{x_0^2} - \dot{x}_0^2 \right) \cos(2\zeta) \right], \quad (2.5)$$

$$y(\zeta) = \dot{y}_0 \zeta + y_0, \quad (2.6)$$

kde x_0, y_0 a \dot{x}_0, \dot{y}_0 jsou počáteční souřadnice a rychlost struny. Jedná se o pohyb regulární, struna periodicky osciluje ve směru x , rychlost struny ve směru y se zachovává.

Z podmínky $H = 0$ pro Hamiltonián (2.2) můžeme vyjádřit energii struny

$$E^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{J^2}{x} + x \right)^2, \quad (2.7)$$

kde jsme již přeškálovali energii $E \rightarrow E / \mu$ a proud $J \rightarrow J / \sqrt{\mu}$. Zavedeme také energii ve směru x a y pomocí vztahů

$$E_y^2 = \dot{y}^2, \quad E_x^2 = \dot{x}^2 + \left(\frac{J^2}{x} + x \right)^2 = (x_i + x_o)^2 = E_0^2. \quad (2.8)$$

Celková energie struny E se zachovává, je konstantou pohybu. Vzhledem k tomu, že pohyby struny ve směrech x a y probíhají v plochem prostoročase nezávisle (2.4), zachovávají se také obě energie E_x a E_y .

Energie ve směru x , kterou jsme označili jako E_0 , je zcela určena minimálním x_i a maximálním x_o rozpětím struny (vnitřní a vnější rádius)

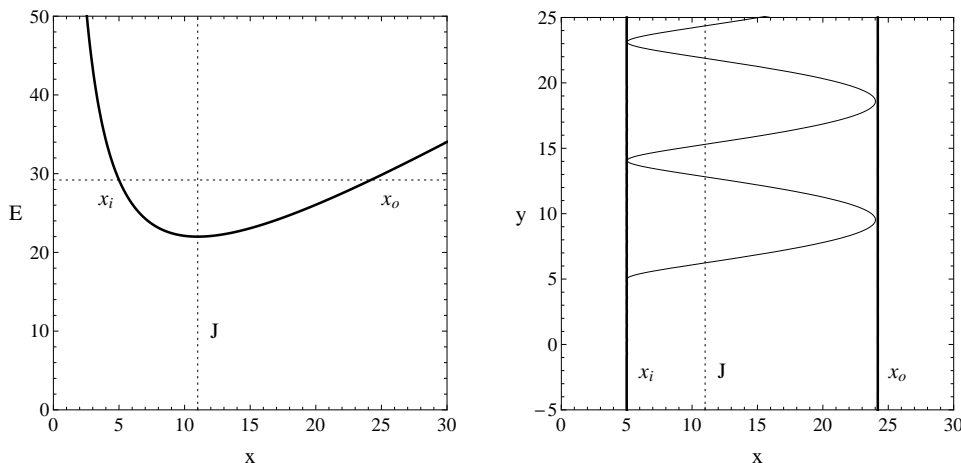
$$x_{i,o} = \frac{1}{2} \left(E_0 \mp \sqrt{E_0^2 - 4J^2} \right). \quad (2.9)$$

Energie E_0 je minimální, pokud oscilace struny ve směru x ustanou - vnitřní a vnější poloměr struny se shodují

$$x_i = x_o = J. \quad (2.10)$$

To odpovídá rovnovážné poloze struny, kdy se navzájem kompenzují odstředivé síly a síly tenze. I když nyní struna neosciluje, stále má energii danou proudem na struně

$$E_{0(\min)} = 2J. \quad (2.11)$$



Obrázek 2.1. Kruhová struna v plochem prostoročase, startující z bodu $[5, 5]$ s $P_x = 0, P_y \neq 0$ a parametry $J = 11, E = 29.2$. Nalevo vidíme průběh funkce $E_b(x)$ (tlustá křivka) s minimem v $x = J$ určující hranici pohybu, napravo konkrétní trajektorii struny.

Energie E_0 může být interpretována jako vnitřní energie oscilující struny nezávisle na pohybu podél osy y . Skládá se z potenciálové a kinetické části; pouze v případě $x_i = x_o$ je vnitřní kinetická energie nulová, vnitřní potenciální energie je rovna $2J$.

Hranice omezující pohyb struny v plochem prostoročase má jednoduchý tvar

$$E = E_b(x, y) \equiv \frac{J^2}{x} + x, \quad (2.12)$$

kde funkce energetická hranice pohybu $E_b(x, y)$ nezávisí na souřadnici y . Funkce diverguje $E_b \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow 0$ i pro $x \rightarrow \infty$; formující tak bariéru pro pohyb struny.

Z podmínky pro existenci stacionárních bodů funkce $E_b(x, y)$ (1.32-1.33), nalezneme minimum funkce $E_b(x)$ na

$$x_{\min} = J, \quad E_{\min} = 2J, \quad (2.13)$$

pro libovolné y - ve směru souřadnice y je funkce $E_b(x, y)$ konstantní.

Chování funkce $E_b(x, y)$ je zobrazeno na obr. 2.1 - konvexní tvar funkce $E_b(x)$ pro všechna y zaručuje, že zde bude vždy existovat vnitřní i vnější hranice pro pohyb ve směru souřadnice x . Struna umístěná do bodu x_{\min} s energií $E = E_{\min} = 2J$ nebude oscilovat - všechna její energie je obsažena v potenciálové části vnitřní energie E_0 .

2.2. Vliv elektromagnetického pole na dynamiku struny

Zatím bylo námi vyšetřované skalární pole na kruhové struně neutrální - neinteragující s polem elektromagnetickým. Pokusme se nyní ukázat dopad působení elektromagneticky interagujícího skalárního pole na dynamiku struny.

Vnější elektromagnetické pole, určené čtyřpotenciálem A^μ , budeme považovat stejně jako metriku (2.1) za předem pevně dané. Požadavek na axiální symetrii úlohy předpokládá pouze t a ϕ nenulové složky čtyřpotenciálu A_μ . V plochem prostoročase můžeme pro popis stacionárního vnějšího elektromagnetického pole použít klasickou elektrodynamiku se vztahy [15]

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}), \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.14)$$

K pochopení vlivu elektromagnetického pole na dynamiku kruhové struny vyšetříme dva důležité jednoduché případy - (1) struna v elektrostatickém poli bodového náboje $Q \geq 0$ a (2) struna v homogenním magnetickém poli $B \geq 0$ orientovaném rovnoběžně s osou y . Příslušný čtyřpotenciál A^μ nabývá ve válcových souřadnicích t, x, y, ϕ (2.1), viz obr. 1.1, tvaru

$$A_{(1)}^\mu = \frac{Q}{r} (1, 0, 0, 0), \quad \Phi = \frac{Q}{r}, \quad (2.15)$$

$$A_{(2)}^\mu = \frac{B}{2} (0, 0, 0, 1), \quad \vec{B} = (0, B, 0), \quad (2.16)$$

kde r je vzdálenost od počátku $r^2 = x^2 + y^2$ a x je radiální souřadnice válcových souřadnic (2.1). Pro permitivitu ϵ a permeabilitu μ jsme použili $\epsilon = 1$ a $\mu = 1$.

Akci pro kruhovou strunu v elektromagnetickém poli¹ zavedeme jako [6]

$$S = \int \mathcal{L} d\sigma d\tau, \quad \mathcal{L} = -\mu\sqrt{-h} - \frac{1}{2}\sqrt{-h}h^{ab}(\varphi_{|a} + A_a)(\varphi_{|b} + A_b), \quad (2.17)$$

kde $A_a = A_\gamma X_{|a}^\gamma$. První část tvoří klasická akce pro Nambu—Gotovu strunu pouze s tenzí μ , druhá část znázorňuje interakci skalárního pole φ s čtyřpotenciálem A_α pole elektromagnetického. Uvedená akce (2.17) je efektivní akcí pro popis proudu, tvořeného bosony nebo i fermiony, na supravodivé struně [3, 4]. K akci (2.17) můžeme připojit člen poskytující Maxwellovy rovnice pro vývoj pole A_α

$$S_{\text{EM}} = -\frac{1}{16\pi} \int F^{\mu\nu} F_{\nu\mu} d^4x, \quad (2.18)$$

kde $F_{\mu\nu}$ je tenzor elektromagnetického pole

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu|\mu} - A_{\mu|\nu}. \quad (2.19)$$

¹ Oproti již zavedené akci (1.7) přeskálujeme skalární pole $\varphi \rightarrow \varphi/2$.

V dalším budeme předpokládat vnější elektromagnetické pole A^α za předem pevně dané, a vlastní elektromagnetické pole struny A_s^α vůči němu malé. Pak lze vliv struny samu na sebe (electromagnetic self-interaction) zanedbat [4]. Struna bude testovací a člen akce (2.18) proto dále neuvažujeme.

Variací akce (2.17) podle skalárního pole φ dostáváme

$$\left[\sqrt{-h} h^{ab} (\varphi_{|a} + A_a) \right]_{|b} = 0. \quad (2.20)$$

Axiální symetrie implikuje $\varphi_{|\sigma\sigma} = 0$ i $A_\phi = A_\sigma \neq A_\sigma(\phi)$, proto z rovnice (2.20) plyne, že existují zachovávající se veličiny Ω a n , definované jako

$$\Omega = \varphi_{|\tau} + A_\tau, \quad n = \varphi_{|\sigma}, \quad (2.21)$$

přičemž $J^2 \equiv (\Omega^2 + n^2)/2$.

Variací akce (2.17) podle indukované metriky h_{ab} získáme tenzor energie hybnosti struny

$$\begin{aligned} \Sigma^{\tau\tau} &= \frac{\Omega^2 + (n + A_\phi)^2}{g_{\phi\phi}} + \mu, & \Sigma^{\sigma\sigma} &= \frac{\Omega^2 + (n + A_\phi)^2}{g_{\phi\phi}} - \mu, \\ \Sigma^{\sigma\tau} &= \frac{-\Omega(n + A_\phi)}{g_{\phi\phi}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Hustotu proudu generovaného strunou získáme variací Lagrangiánu z akce (2.17) podle čtyřpotenciálu A_α

$$J^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} = -\rho X_{|\tau}^\mu + j X_{|\sigma}^\mu, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial j}{\partial \sigma}, \quad (2.23)$$

kde vidíme, že kruhová struna má hustotu proudu podél struny $j = n + A_\phi$ a konstantní hustotu elektrického náboje $\rho = \Omega$ [6].

Variace akce (2.17) podle souřadnice X^μ vede na rovnice pohybu ve tvaru

$$\frac{D}{d\tau} \Pi_\mu^{(\tau)} + \frac{D}{d\sigma} \Pi_\mu^{(\sigma)} = 0, \quad (2.24)$$

kde jsme zavedli kanonické hybnosti

$$\Pi_\mu^{(\tau)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = \Sigma^{\tau a} g_{\mu\lambda} X_{|a}^\lambda + \Omega A_\mu, \quad (2.25)$$

$$\Pi_\mu^{(\sigma)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = \Sigma^{\sigma a} g_{\mu\lambda} X_{|a}^\lambda - (n + A_\phi) A_\mu. \quad (2.26)$$

Podobným postupem jako v části pro elektromagneticky neinteragující strunu (část 1) dojdeme k Hamiltoniánu [6]

$$H = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\Pi_\alpha - \Omega A_\alpha) (\Pi_\beta - \Omega A_\beta) + \frac{1}{2} g_{\phi\phi} [(\Sigma^{\tau\tau})^2 - (\Sigma^{\tau\sigma})^2] \quad (2.27)$$

společně s Hamilton—Jacobiho rovnicemi

$$P^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\zeta} = \frac{\partial H}{\partial \Pi_\mu}, \quad \frac{d\Pi_\mu}{d\zeta} = -\frac{\partial H}{\partial X^\mu}. \quad (2.28)$$

Z první rovnice (2.28) získáme vztah mezi kanonickými Π^μ a mechanickými hybnostmi P^μ ve tvaru

$$P^\mu = \Pi^\mu - \Omega A^\mu. \quad (2.29)$$

Symetrie určuje zachovávající se veličiny - energii E a moment hybnosti L

$$-E = \Pi_t = P_t + \Omega A_t, \quad (2.30)$$

$$L = \Pi_\phi = g_{\phi\phi} \Sigma^{\tau\sigma} + \Omega A_\phi = -\Omega n. \quad (2.31)$$

Vliv elektromagnetického pole na dynamiku struny je srozumitelný, pokud provedeme názorné srovnání s pohybem nabitě částice v tomtěz poli. Hamiltonián pro pohyb elektricky nabitě testovací částice s hmotností m a nábojem q je [15]

$$H_p = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\Pi_\alpha - q A_\alpha) (\Pi_\beta - q A_\beta) + \frac{1}{2} m^2, \quad P^\mu = \Pi^\mu - q A^\mu. \quad (2.32)$$

Budeme předpokládat, že částice obíhá po kruhové orbitě s poloměrem x s konstantní úhlovou rychlostí $\omega = P^\phi/m$. Energie částice $E = -\Pi_t$ i moment hybnosti $L = \Pi_\phi$ jsou zachovávající se veličiny.

Hamiltonián pro pohyb částice po kruhové orbitě (2.32) a Hamiltonián kruhové struny (2.27) **v poli bodového náboje** Q (2.15) jsou

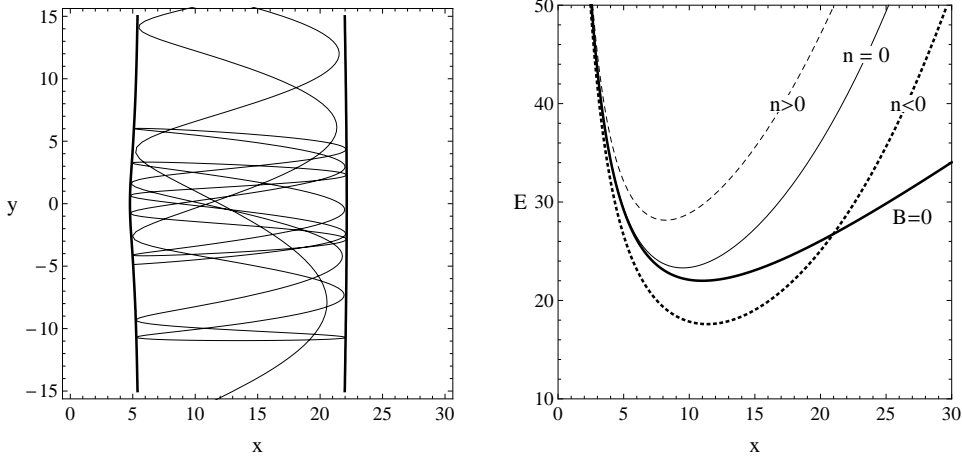
$$H_{p(1)} = \frac{1}{2} P_x^2 + \frac{1}{2} P_y^2 - \frac{1}{2} \left(E - \frac{qQ}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{L^2}{x^2}, \quad (2.33)$$

$$H_{s(1)} = \frac{1}{2} P_x^2 + \frac{1}{2} P_y^2 - \frac{1}{2} \left(E - \frac{\Omega Q}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\mu x + \frac{J^2}{x} \right)^2. \quad (2.34)$$

Pohyb částice v tomto případě může být pouze centrální, neboť centrální je symetrie elektrického pole. Rovinu pohybu lze volit jako ekvatoriální, kdy bude nutně $P_y = 0$. Pohyb částice zůstává regulární [15]. Na druhou stranu, pohyb struny může probíhat i mimo ekvatoriální rovinu (paralelně s ní), ale v tomto případě již nejde o pohyb regulární, nýbrž obecně chaotický. V Hamiltoniánu (2.34) vidíme působení radiální Columbické síly $\sim \Omega Q/r^2$ na element kruhové struny s nábojem Ω ; síla je přitažlivá pro $\Omega Q < 0$ a odpudivá pro $\Omega Q > 0$. Radiální silové pole poruší symetrii vůči translaci kruhové struny podél osy y a pohyb struny již nemůže být regulární, viz obr. 2.2(a).

Použijeme-li podmínku (2.21), můžeme zavést parametr ω_1

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Omega}{J}, \quad -1 \leq \omega_1 \leq 1, \quad (2.35)$$

(a) Chaotický pohyb v poli náboje Q (b) Energie struny v mag. poli \vec{B}

Obrázek 2.2. Vliv elektromagnetického pole na dynamiku struny. Struna v poli bodového náboje Q (a) je ovlivněna sféricky symetrickou silou porušující symetrii úlohy a způsobující neregularitu pohybu. Struna v homogenním magnetickém poli \vec{B} pociťuje nové síly snažící se pouze změnit poloměr; konfigurace s $n < 0$ je z energetického hlediska stabilnější oproti $n > 0$ konfiguraci.

a vyjádřit funkci energetická hranice pohybu $E_b(x, y)$ pro kruhovou strunu v poli bodového náboje Q jako

$$E_b(x, y) = \mu x + \frac{J^2}{x} + \frac{\sqrt{2}\omega_1 JQ}{r}. \quad (2.36)$$

Případ $\omega_1 = -1$ odpovídá situaci s opačnými náboji Q a Ω , $\omega_1 = 0$ nenabitě struně a $\omega_1 = 1$ souhlasným nábojům.

Dynamiku testovací částice a kruhové struny v **homogenním magnetickém poli** \vec{B} orientovaném rovnoběžně s osou y (2.16) určíme z Hamiltoniánů pro pohyb částice a struny (2.32-2.27)

$$H_{p(2)} = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}P_y^2 - \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{x} - \frac{qB}{2}x \right)^2 + \frac{1}{2}m^2, \quad (2.37)$$

$$H_{s(2)} = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}P_y^2 - \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2} \left(\mu x + \frac{J^2}{x} + \frac{nB}{2}x + \frac{B^2}{8}x^3 \right)^2. \quad (2.38)$$

Zde elektromagnetické pole symetrii neporuší; nezávislost obou Hamiltoniánů na souřadnici y znamená zachovávající se hybnost P_y^2 a volný pohyb ve směru y . První a druhý člen v závorce Hamiltoniánu pro pohyb struny (2.38) jsou nám již známé vliv tenze μ a momentu hybnosti L . Srovnáním s Hamiltoniánem pro pohyb částice (2.37) vidíme, že třetí člen reprezentuje Lorentzovu sílu, vzniklou proudem $-n$ a působící ve směru x . Poslední člen v závorce Hamiltoniánu (2.38) je

hustota energie magnetického pole. Je zajímavé, že člen reprezentující působení síly Lorentzovy se mění jako $\sim x$, tedy stejně jako člen pocházející z tenze μ struny - Lorentzova síla generuje na kruhové struně „magnetickou tenzi“. Stejný člen s významem Lorentzovské „tenze“ se objevuje i v případě nabitě částice.

Použijeme-li podmínku (2.21), můžeme zavést parametr ω_2

$$\omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{n}{J}, \quad -1 \leq \omega_2 \leq 1, \quad (2.39)$$

a vyjádřit funkci energetická hranice pohybu pro kruhovou strunu $E_b(x, y)$ v homogenním magnetickém poli \vec{B} ve tvaru

$$E_b(x) = \mu x + \frac{J^2}{x} - \frac{\omega_2 J B}{\sqrt{2}} x + \frac{B^2}{8} x^3. \quad (2.40)$$

Případy $\omega_2 = \pm 1$ odpovídají proudům tekoucím podél struny v kladném a záporném směru, $\omega_2 = 0$ struně bez proudu.

Z vyšetřování stability proudové smyčky v magnetickém poli $B > 0$ víme, že pro $n > 0$ ($\omega_2 < 0$) bude kruhová struna v nestabilní, pro $n < 0$ ($\omega_2 > 0$) ve stabilní pozici, viz obr. 2.2(b).

Kapitola 3

Kruhová struna v okolí kompaktního objektu

V této části rozebereme podrobně pohyb kruhové struny ve Schwarzschildově a Kerrově geometrii, popisující kompaktní objekt - černou díru nebo nahou singularitu. Následně shrneme výsledky pro vliv kosmologické konstanty.

3.1. Kruhová struna ve Schwarzschildově geometrii

Uvažujeme sféricky symetrickou metriku vyjádřenou délkovým elementem

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + A^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.1)$$

Pro Schwarzschildův prostoročas má charakteristická funkce $A(r)$ tvar

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (3.2)$$

kde M je hmotnost kompaktního objektu - černé díry. Podmínka $A(r) = 0$ určuje pozici horizontu na $r_h = 2M$, oblast prostoročasu $r < r_h$ nazýváme dynamickou oblastí [15]. V následujícím textu se omezíme pouze na $r > r_h$.

Je vhodné používat bezrozměrných souřadnic $r \rightarrow r/M$ a také zavést bezrozměrný parametr $J \rightarrow J/M$ a energii $E \rightarrow E/M$.

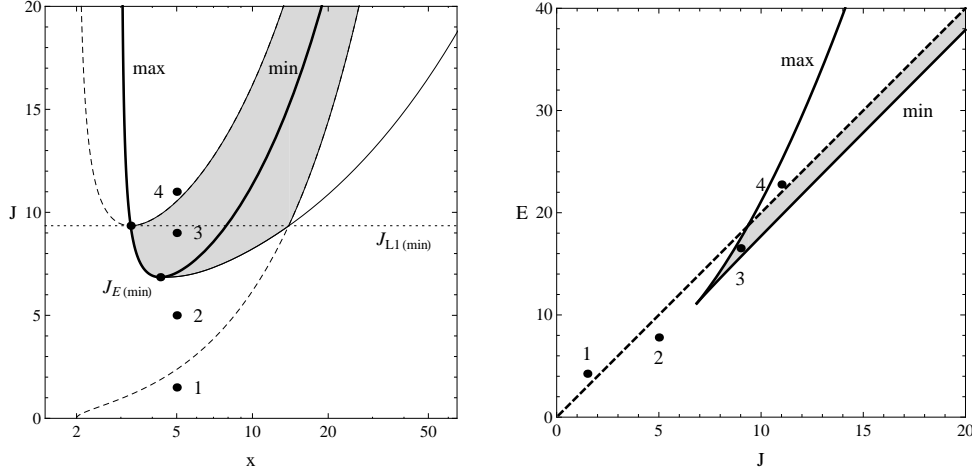
Funkce energetická hranice pohybu (1.31) má pro kruhovou strunu ve Schwarzschildově metrice tvar

$$E_b(r, \theta) = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{r}\right)} \left(\frac{J^2}{r \sin^2\theta} + r \sin^2\theta\right). \quad (3.3)$$

Pro zavedenou funkci $E_b(r, \theta)$ platí $E_b \rightarrow +\infty$ pro $r \rightarrow \infty$, a $E_b \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow 2M$. Na horizontu r_h , kde $A(r) = 0$, nemůžeme sestavit hranici pro pohyb; pod horizontem r_h platí $A(r) < 0$ a funkce $E_b(r, \theta)$ zde není dobře definována.

První podmínka pro existenci stacionárních bodů (1.32) funkce $E_b(r, \theta)$ vede na rovnici vyjádřenou v kartézských souřadnicích (1.2)

$$x^3 - x^2 - J^2x + 3J^2 = 0, \quad (3.4)$$



Obrázek 3.1. Klasifikace možných typů hranice pohybu ve Schwarzschildově prostoročase. Na levém obrázku vidíme funkci $J_E(x)$ (tlustá černá čára) určující pozici extrémů funkce $E_b(x)$ v ekvatoriální rovině pro zvolený proud J . Čárkovaně jsou vyznačeny křivky $J_{L1,L2}$ vymezující možnost struny utéci do nekonečna podél osy y . Oblast „jezírek“, neboli uzavřených hranic pohybu, je znázorněna šedě. Na pravém obrázku je situace zachycena z pohledu parametrů J a E . Tlustou černou čarou je vyznačeno maximum a minimum funkce $E_b(x)$, čárkovaná přímka je podmínka $E = 2J$ pro únik struny do nekonečna v y směru. Jednotlivá čísla odkazují na konkrétní ukázky průběhů funkce $E_b(x, y)$, uvedených na obr. 3.2.

kde druhá podmínka (1.33) dává rovnici $y = 0$ - stacionární body mohou existovat pouze v ekvatoriální rovině. Nejeví se výhodné řešit kubickou rovnici (3.4) vzhledem k souřadnici x , je lepší vyjádřit ji pomocí parametru J jako

$$J^2 = J_E^2 \equiv \frac{x^2(x-1)}{x-3}. \quad (3.5)$$

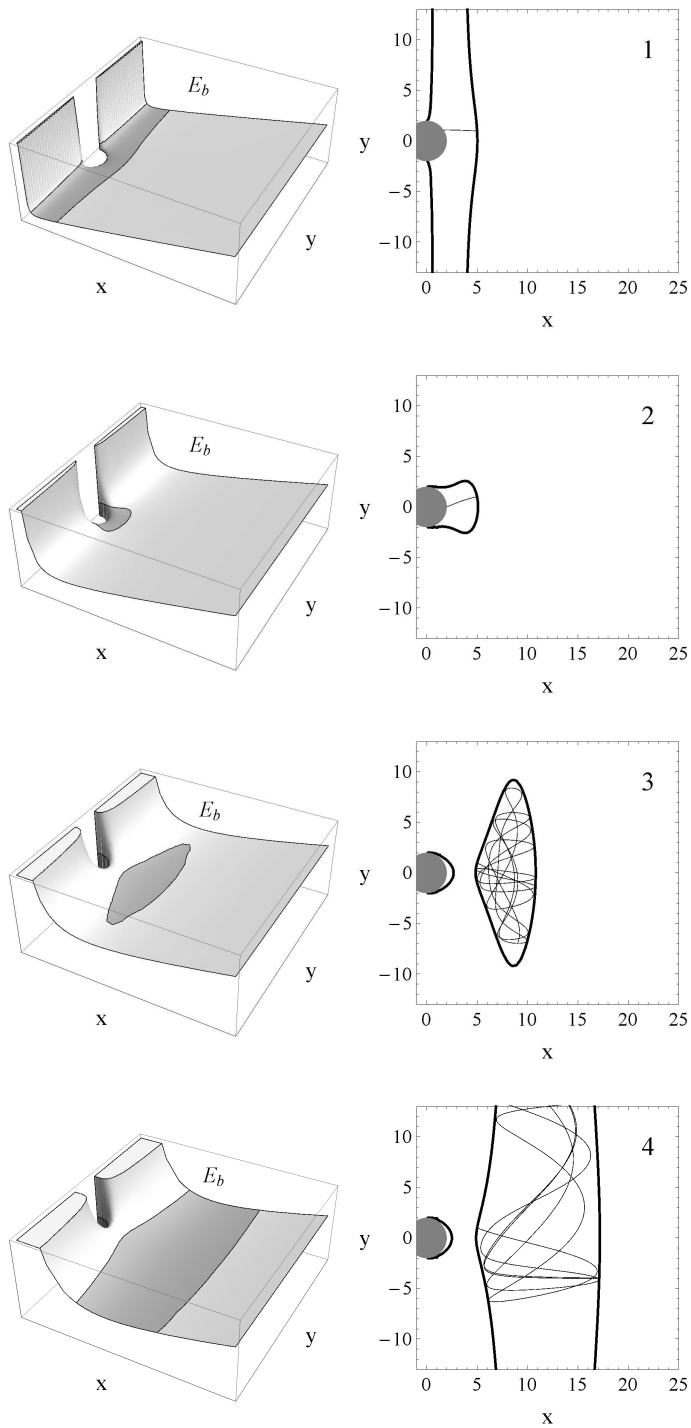
Funkce $J_E(x)$ je vykreslena na obr. 3.1 - pevně daný proud J (konstanta pohybu) zde tvoří přímku a její průsečíky s funkcí $J_E(x)$ pak udávají x pozici stacionárních bodů funkce $E_b(x, y)$ v ekvatoriální rovině $y = 0$.

Vyšetřením průběhu funkce $J_E^2(x)$ zjistíme, pro které hodnoty proudu J je dovolena existence stacionárních bodů pro $E_b(r, \theta)$. Omezíme-li se v rovině $y = 0$ pouze na oblast nad horizontem $x > r_h$, pak funkce J_E^2 diverguje na $x = 3$ a v nekonečnu. Funkce $J_E^2(x)$ má minimum v

$$x_{\min} = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \sim 4.303, \quad J_{E(\min)}^2 = \frac{47 + 13\sqrt{13}}{2}, \quad J_{E(\min)} \sim 6.85. \quad (3.6)$$

Funkce energetická hranice pohybu $E_b(r, \theta)$ má dva extrémy¹ pro $J > J_{E(\min)}$.

¹ Na obr. 3.1 vidíme dva průsečíky přímky konstantního J s funkcí $J_E(x)$.



Obrázek 3.2. Čtyři možné typy průběhu funkce energetická hranice pohybu $E_b(x, y)$ ve Schwarzschildově prostoročase, viz obr. 3.1. Šedě je vyznačena oblast pod horizontem, tlustá křivka je hranice pro pohyb struny $E = E_b(x, y)$, tenká pak konkrétní trajektorie.

Pro $J = J_{E(\min)}$, má funkce $E_b(r, \theta)$ inflexní bod na x_{\min} . Pro proud $J < J_{E(\min)}$ funkce $E_b(r, \theta)$ nemá extrém.

Struna může utéci do nekonečna podél osy y , pokud je velikost její energie E alespoň jako minimální energie v nekonečnu $E_{\min(\text{flat})}$ (2.11)

$$E_b(x, y, J) = E_{\min(\text{flat})}(J) = 2J. \quad (3.7)$$

Tuto podmínku můžeme vyjádřit vzhledem k parametru J a zavést funkce $J_{L1, L2}(x)$ ve tvaru

$$J_{L1} = \frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{\sqrt{x-2}}, \quad J_{L2} = \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{\sqrt{x-2}}. \quad (3.8)$$

Podmínka pro nemožnost úniku struny do nekonečna (3.7) pak nabývá tvaru

$$J_{L1}(x, y) < J < J_{L2}(x, y). \quad (3.9)$$

Obě funkce $J_{L1, L2}(x)$ jsou zakresleny na obr. 3.2. Existuje pouze minimum funkce $J_{L1}(x)$, umístěné na

$$x_{L1(\min)} = \frac{9 + \sqrt{17}}{4} \sim 3.3, \quad (3.10)$$

a souhlasící s průsečíkem funkcí $J_{L1}(x)$ a $J_E(x)$.

Nyní již můžeme tvar energetické hranice pro pohyb struny $E = E_b(x, y)$ klasifikovat z hlediska topologie, tj. podle toho zda-li je otevřená ve směr x nebo y . Ve směru $x \rightarrow \infty$ struna uniknout do nekonečna nemůže - zabraňuje tomu tenze struny μ . Dále existuje bariéra pro $x \rightarrow 0$ - „prokmitnutí“ struny do záporných hodnot souřadnice x zabraňuje proud J (moment hybnosti) na struně. Zbývá tedy jen možnost otevření hranice do nekonečna ve směru y a směrem k horizontu jelikož platí $E_b(r_h, \theta) = 0$.

Proto ve Schwarzschildově prostoročase můžeme nalézt čtyři možné tvary hranice pohybu $E = E_b(r, \theta)$; označujeme je čísly od 1 do 4:

1. V prvním případě $J < J_{L2}$ je hranice otevřená jak v x tak i y směru a struna může utéci do nekonečna podél osy y , nebo může být černou dírou pohlcena.
2. Struna v druhém případě $J_{L2} < J < J_E$ nemá dostatečnou energii a nemůže utéci do nekonečna podél osy y ; zároveň je hranice pro pohyb otevřená směrem k horizontu černé díry. V tomto případě můžeme předpokládat, že struna bude časem černou dírou pohlcena.
3. Hranice pohybu pro třetí případ $J_{L2} < J < J_E$ tvoří uzavřenou křivku - struna je polapena uvnitř „jezířka“ okolo minima funkce $E_b(r, \theta)$. Pokud je struna umístěná přímo v tomto minimu, setrvává zde v klidu, a „jezířko“ pak tvoří pouze tento jediný bod. Minimum funkce $E_b(r, \theta)$ ležící nejbližší horizontu černé díry je umístěné těsně nad pozicí $x_{\min} \sim 4.3$ viz (3.6), což je místo mezi fotonovou ($x_{\text{ph}} = 3$) a mezní stabilní orbitou ($x_{\text{ISCO}} = 6$) pro částice pohybující se ve Schwarzschildově metrice [15].

4. Pro čtvrtý případ $J_{L1} < J$ neexistuje možnost polapení černou dírou a hranice je otevřená podél osy y , kudy struna může utéci do nekonečna. Energetická hranice pouze vymezuje oblasti jichž může struna s energií E dosáhnout, konkrétní trajektorie je přesně určena až počátečními podmínkami $x(0), y(0), P_x(0), P_y(0)$. Názorné příklady uvedených typů hranice jsou vykresleny na obr. 3.2.

Pohyb kruhové struny v hranicích typu 1 a 4 (zde je možnost úniku struny do nekonečna) budeme podrobně zkoumat v části 4.1, jakožto potencionálního modelu jetů. Trajektoriím struny v hranici typu 3 se budeme věnovat v části 4.2, kde ukážeme nárůst chaotičnosti pohybu pro vzrůstající energii struny.

3.2. Kruhová struna v Kerrově geometrii

3.2.1. Kerrova geometrie

Kerrovu černou díru (BH), nebo nahou singularitu (NS) popisujeme Kerrovou geometrií, ve standardních Boyer-Lindquistových souřadnicích

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{R^2} \right) dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{R^2} dt d\phi \quad (3.11)$$

$$+ \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{R^2} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{R^2}{\Delta} dr^2 + R^2 d\theta^2,$$

kde a značí spin a M hmotnost,

$$R^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (3.12)$$

Předpokládáme podmínky $0 < a < M$ pro BH a $M < a$ pro NS, fyzikální singularita leží na kroužku $r = 0, \theta = \pi/2$. Je výhodné použít Kerr-Schildovy „kartézské“ souřadnice, svázány s Boyer-Lindquistovými souřadnicemi relacemi²

$$x = (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \cos \left[\phi - \tan^{-1} \left(\frac{a}{r} \right) \right], \quad (3.13)$$

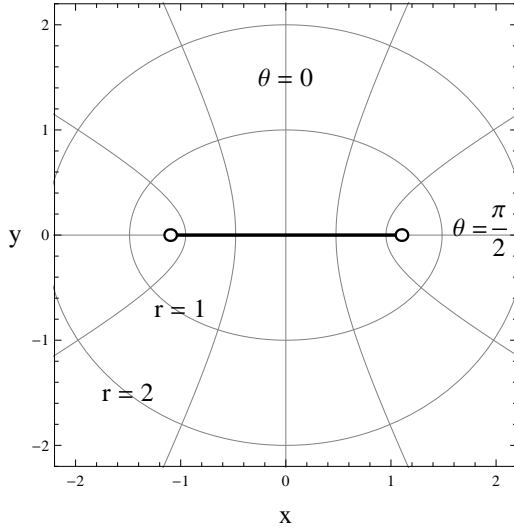
$$z = (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \sin \left[\phi - \tan^{-1} \left(\frac{a}{r} \right) \right], \quad (3.14)$$

$$y = r \cos \theta. \quad (3.15)$$

Náš kruhová struna má axiální symetrii a proto nás budou zajímat pouze řezy s konstantní souřadnicí ϕ ; můžeme zvolit co nejvýhodnější řez

$$\phi = \tan^{-1} (a/r) \quad (3.16)$$

² Oproti standardní notaci, jsme zaměnili osy $z \leftrightarrow y$.



Obrázek 3.3. Ukázka řezu zploštěných sférických souřadnic (3.17) s $a = 1.1$. Body $x = \pm a, y = 0$ jsou označeny kroužkem, tlustá čára je pro $\|x\| < a, y = 0$.

a tím získáme souřadnicovou transformaci v rovině $r, \theta (x, y)$

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta, \quad y = r \cos \theta. \quad (3.17)$$

V tomto řezu vidíme z fyzikální singularity dva body umístěné na $[x, y] = [\pm a, 0]$. Opět budeme pracovat v bezrozměrných souřadnicích, přeskálujeme také spin $a \rightarrow a/M$.

Oproti Kerrovým BH $a < 1$, kde existují horizonty, neobsahují Kerrovy NS $a > 1$ žádný horizont událostí. Dynamická oblast mezi horizonty $r_{h\pm}$ je určena podmínkou

$$\Delta = r^2 - 2r + a^2 < 0, \quad r_{h\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - a^2}. \quad (3.18)$$

Podrobné informace o Kerrově metrice lze najít např. v [15]. Uvedeme pouze užitečnou identitu platnou v Kerrově metrice

$$g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = \Delta \sin^2(\theta). \quad (3.19)$$

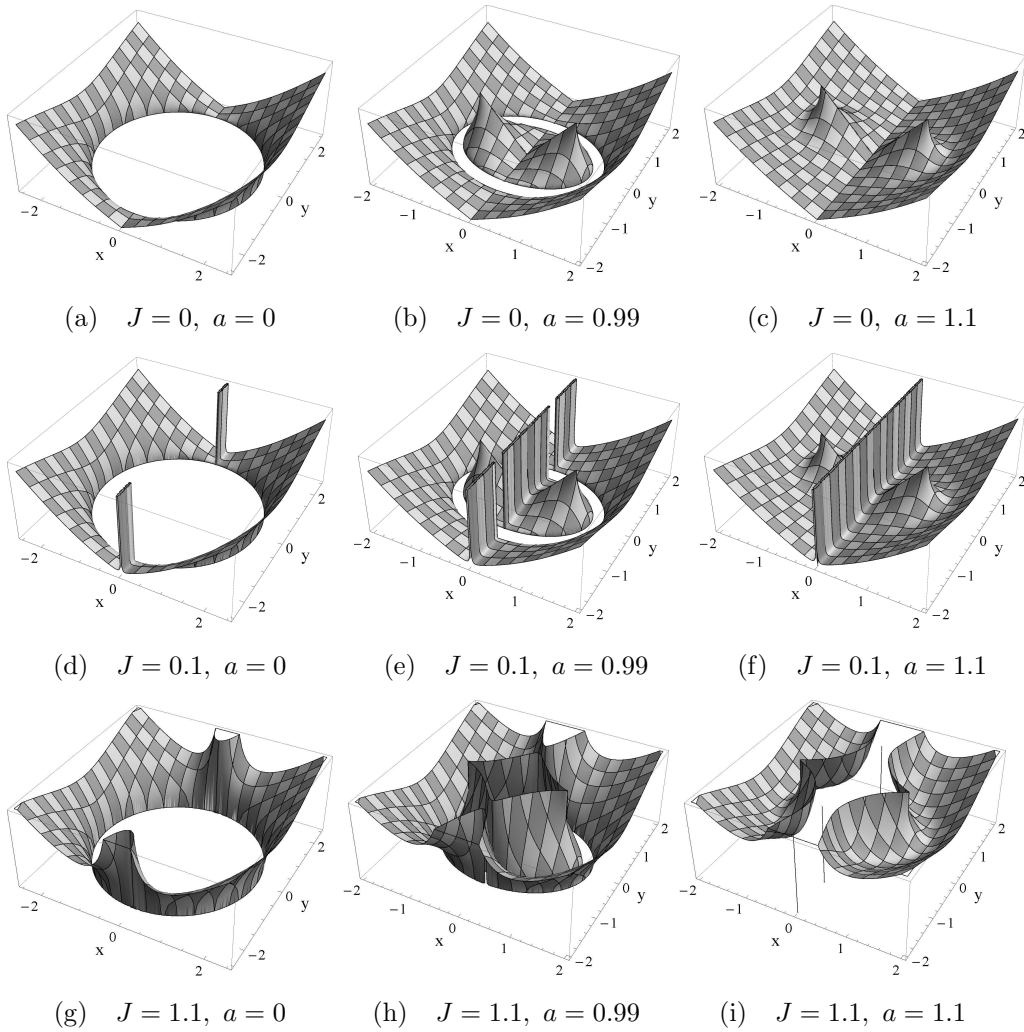
Předchozí vyšetřený případ Schwarzschildovy BH budeme považovat za speciální případ Kerrovy BH se spinem $a = 0$.

Funkce energetická hranice pohybu (1.31) má v případě Kerrovy metriky tvar

$$E_b(r, \theta) = \frac{4a\omega J^2 r}{(\omega^2 + 1)G} + \sqrt{\Delta} \left(\frac{J^2 R^2}{G \sin(\theta)} + \sin(\theta) \right), \quad (3.20)$$

kde

$$G = (a^2 + r^2) R^2 + 2a^2 r \sin^2(\theta). \quad (3.21)$$



Obrázek 3.4. Funkce energetická hranice $E_b(x, y)$ pro významné hodnoty parametrů J a a . Vliv parametru ω můžeme pro malé hodnoty J zanedbat, zde uvádíme pouze případ $\omega = 0$. V dynamické oblasti funkce $E_b(x, y)$ není definovaná - prázdné oblasti, „roh“ označují umístění fyzikální singularity. Zřetelně je vidět, že i minimální proud J vytvoří bariéru zabráňující „prokmitu“ (změnu znaménka souřadnice x) při pohybu struny. V případě NS je struně dovoleno pohybovat se i pod singularitou. Definiční obor funkce $E_b(x, y)$ (rovina $x-y$) je ukázán pro $a = 1.1$ na obr. 3.3.

Je zřejmé, že funkce $E_b(r, \theta)$ není definovaná pro dynamickou oblast (3.18) Kerrova prostoročasu.

Hlavní důraz při vyšetřování dynamiky kruhové struny pro BH budeme klást pro oblast nad vnějším horizontem odkud, struna může dosáhnout nekonečna.

3.2.2. Nambu—Goto struna

Chceme-li pochopit, jak působí gravitace a spin kompaktního objektu na dynamiku kruhové struny, je vhodné nejprve zkoumat jednodušší případ klasické Nambu—Goto struny, neboli struny pouze s tenzí a bez proudu $J = 0$. Později v sekci 4.1 uvidíme, že malé proudy $J \sim 0$ jsou velice důležité pro ultra-relativistické urychlení struny ve směru y .

Funkce hranice pohybu E_b (3.20) se pro $J = 0$ zjednodušuje na tvar

$$E_b^2(r, \theta) = g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = \sin^2(\theta)(a^2 - 2r + r^2). \quad (3.22)$$

Tato funkce je vykreslena v souřadnicích x, y (3.17) pro reprezentativní hodnoty spinu $a \in \{0, 0.99, 1.1\}$ na prvním řádku obr. 3.4. Je ukázáno chování v okolí počátku souřadnic, kde je průběh funkce $E_b(x, y)$ rozdílný; všechny tři případy se sjednotí pro velké vzdálenosti od počátku souřadnic.

Kritické body funkce $E_b(x, y)$, kde je derivace nulová nebo neexistuje, jsou

$$(a) \quad \text{maximum} \quad A = [\pm a, 0]; \quad E_b(A) = a, \quad (3.23)$$

$$(b) \quad \text{sedlo} \quad B = [\pm \sqrt{1 + a^2}, 0]; \quad E_b(B) = \sqrt{1 + a^2}, \quad (3.24)$$

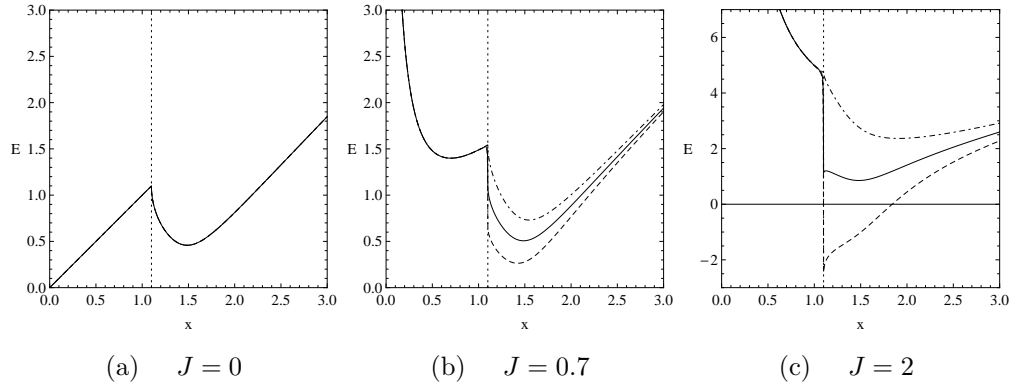
$$(c) \quad \text{„udolí“} \quad x = 0; \quad E_b(0, y) = 0. \quad (3.25)$$

Struna umístěná do maxima v bodě (a) („špička rohu“) reprodukuje Kerrovu kruhovou singularitu. Bod (b) je sedlo mezi maximem v (a) a nárůstem funkce $E_b(x, y)$ pro zvyšující se souřadnici x . Body (c) odpovídají ose y , struna zde umístěná leží v „udolí“ funkce $E_b(x, y)$ a má nulový poloměr. Ve všech třech případech (a,b,c) může být struna v klidu, v případech (a) a (b) se jedná o pozice nestabilní vůči perturbacím, případ (c) je stabilní ve směru souřadnice x .

Pro strunu bez proudu a s nenulovým poloměrem neexistuje stabilní minimum, což je způsobeno nulovým momentem hybnosti struny (1.29). Na uvedeném případě kruhové struny bez proudu $J = 0$ vidíme pouze účinek gravitace a strunové tenze na funkci energetická hranice pohybu $E_b(x, y)$. Případ struny s nenulovým proudem v plochém prostoročase byl podrobně rozebrán v části 2, zde funkce $E_b(x, y)$ nabývá tvaru dlouhého údolí s nejnižší částí v $x = J$ pro všechna x . V obecném případě (libovolné parametry a, J, ω , vliv gravitace) má funkce $E_b(x, y)$ poměrně komplikovaný průběh, viz srovnání na obr. 3.4. Toto složité chování si lze představit jako kombinovaný efekt proudu J v plochém prostoročase (2.7) a vlivu metriky (gravitace) pro $J = 0$, viz (3.22). Zajímavý průběh má funkce $E_b(x, y)$ zvláště v okolí počátku souřadnic, viz řezy ekvatoriální rovinou na obr. 3.5.

3.2.3. Struna se skalárním polem

Pro strunu nesoucí skalární pole $J \neq 0$ a mající tak moment hybnosti, můžeme vyjádřit funkci energetická hranice pohybu $E_b(r, \theta)$ v Kerr—Schildových



Obrázek 3.5. Řezy funkcí $E_b(x, y)$ v ekvatoriální rovině $y = 0$ v blízkosti singularity (pozice určena tečkovanou čarou) pro NS s $a = 1.1$. Zobrazeny jsou různé hodnoty proudu J ; jednotlivé hodnoty parametru ω jsou rozlišeny jako -1 (čárkovaná), 0 (plná) a 1 (čerchovaná) křivka.

souřadnicích x, y (3.17) jako

$$E_b(x, y) = \begin{cases} x + \frac{J^2}{x} & \text{pro } x \leq a, y = 0 \\ E_b[r(x, y), \theta(x, y)] & \text{jinde,} \end{cases} \quad (3.26)$$

kde jsme dodefinovali funkci $E_b(x, y)$ i pro $x \leq a, y = 0$ tak, aby byla spojitá. V místě singularity $[x, y] = [a, 0]$ je funkce definovaná jako $E_b(a, 0) = a + J^2/a$, nicméně limita funkce $E_b(r, \theta)$ dává hodnotu

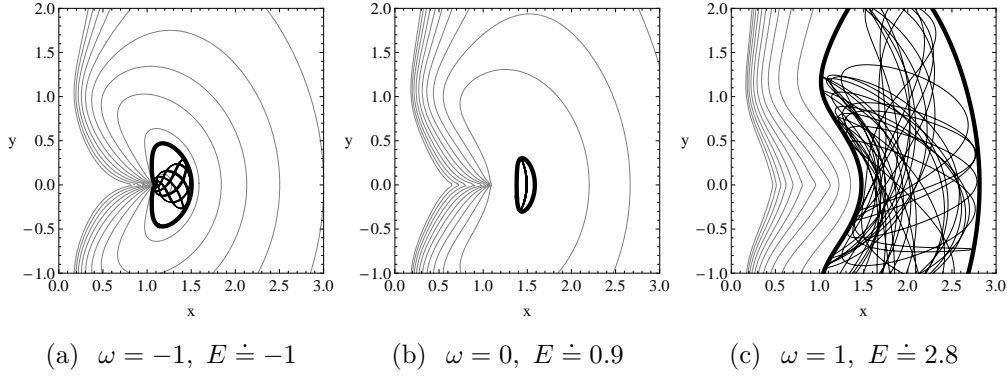
$$\lim_{r \rightarrow 0} E_b(r, \pi/2) = a + \frac{2J^2\omega}{a(1 + \omega^2)}. \quad (3.27)$$

Jediná neodstranitelná nespojitost proto přežívá v místě singularity pro hodnoty proudu $J > 0$ a hodnoty parametru $\omega \in \{0, -1\}$, viz obr. 3.5. Pro případ $\omega = -1$ existuje v blízkém okolí nahé singularity oblast negativních energií, viz čárkovaná křivka na obr. 3.5(c). Nutno podotknout, že v případě Kerrovy BH zůstává singularita skryta pod vnějším horizontem, kam pohyb struny nesledujeme.

Daleko od počátku souřadnic, kde je již prostoročas téměř plochý, převládnou ve funkci $E(x, y)$ členy, které již známe z vyšetřování dynamiky struny v plochém prostoročase

$$E_{b(\text{flat})}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} E_b(x, y) = x + \frac{J^2}{x}. \quad (3.28)$$

Extrém funkce (kritický bod) může nastat v bodech, kde je derivace nulová (stacionární body), nebo derivace neexistuje. Stacionární body funkce $E_b(r, \theta)$ můžeme z podmínek na jejich existenci (1.32-1.33) vyjádřit vzhledem k parametru J a rozdělit do dvou skupin



Obrázek 3.6. Příklady pohybu struny $J = 2$ v okolí nahé singularity $a = 1.1$, srovnej s obr. 3.5(c). Ve všech třech případech startuje struna z klidu z bodu $[r_0, \theta_0] = [1, \pi/2 + 0.3]$ pokaždé ale s jinou energií. Pro případ $\omega = -1$ je předvedena trajektorie struny s negativní energií $E < 0$.

- body ležící v *ekvatoriální rovině*, zde platí

$$J^2 = J_{(E)r}^2(r, \pi/2), \quad \theta = \pi/2 \quad (3.29)$$

- body ležící *mimo ekvatoriální rovinu*, zde platí

$$J^2 = J_{(E)r}^2(r, \theta), \quad J^2 = J_{(E)\theta}^2(r, \theta) \quad (3.30)$$

Nově zavedené funkce $J_{(E)r}^2(r, \theta)$ a $J_{(E)\theta}^2(r, \theta)$ jsme získali z podmínky na nulovost parciální derivace funkce $E_b(r, \theta)$ podle souřadnice r (1.32) a θ (1.33) jako

$$J_{(E)r}^2(r, \theta) \equiv \frac{(1 + \omega^2)G^2(2r - 2)\sin^2(\theta)}{8a\sqrt{\Delta}\omega \sin(\theta)F_1 + (1 + \omega^2)(G(2(r - 1)R^2 + 4r\Delta) - F_2)},$$

$$F_1 = G - 4r^4 - 2a^2r^2 - 2a^2r(r \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)), \quad (3.31)$$

$$F_2 = 4R^2\Delta(r(a^2 + 2r^2) + a^2(r \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))), \quad (3.32)$$

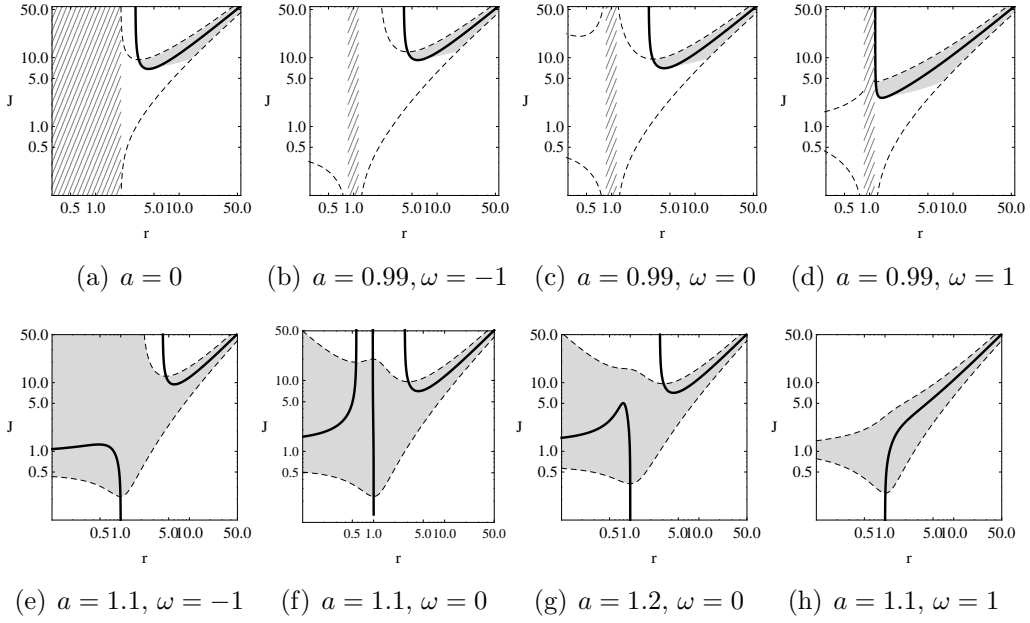
$$J_{(E)\theta}^2(r, \theta) \equiv \frac{(1 + \omega^2)G^2}{(1 + \omega^2)(2Ga^2 + R^2[G \csc^2(\theta) - 2a^2\Delta]) - 8a^3\omega\sqrt{\Delta}r \sin(\theta)}.$$

Stejně jako v případě Schwarzschildovy BH, i zde platí, že pro pevně daný proud J , udávají rovnice (3.29) a (3.30) souřadnice stacionárního bodu funkce $E_b(r, \theta)$.

Dále je pro klasifikaci průběhu funkce $E_b(x, y)$ důležité, zda-li je příslušná hranice otevřená ve směru y - struna tudíž může utéci do nekonečna. Struně se může podařit utéci do nekonečna podél osy y pokud má dostatečnou energii E , neboli

$$E > E_{b(0)\min} = 2J, \quad (3.33)$$

kde $E_{b(0)\min}$ je minimální energie struny v nekonečnu, viz část 2. Pokud kruhová struna nemá dostatečnou energii, může být BH polapena, nebo být uzavřena v



Obrázek 3.7. Pro různé hodnoty parametru a a ω je předveden (jako černá tlustá křivka) průběh funkce $J_{(E)eq}(r)$, která určuje extrémy funkce $E_b(x, y)$ v ekvatoriální rovině. Dynamická oblast Kerrova prostoročasu je vyznačena šrafováním. Tečkované křivky jsou funkce $J_{L1}(r)$ a $J_{L2}(r)$ vyjadřující podmínku, zda-li má struna dostatek energie pro únik do nekonečna. Tyto křivky ohraničují šedou oblast existence „jezírek“ - uzavřených hranic pro pohyb struny. Uvnitř „jezířka“ leží minimum funkce $E_b(x, y)$ - stabilní klidová pozice pro pohyb struny. V případě BH, je pro $\omega > 0$ šedá oblast blíže vnějšímu horizontu, pro $\omega < 0$ dále.

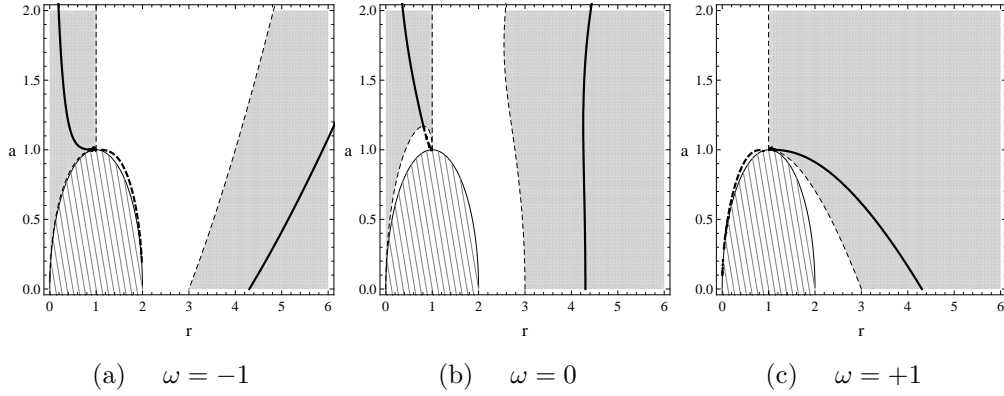
pevně ohraničené oblasti - „jezířka“ funkce $E_b(x, y)$. Podmínku (3.33) můžeme také vyjádřit vzhledem k parametru J jako

$$J_{L1, L2} = \frac{(1 + \omega^2)G \pm \sqrt{(1 + \omega^2)G \left((1 + \omega^2)(G - \Delta R^2) - 4a\omega \sin(\theta)\sqrt{\Delta} \right)}}{(1 + \omega^2) \csc(\theta)\sqrt{\Delta}R^2 + 4a\omega}, \quad (3.34)$$

kde $+$ značí J_{L1} a $-$ značí J_{L2} . Pokud je funkce $E_b(x, y)$ uzavřená ve směru x i y a tvoří tak uzavřenou křivku, pak je struna polapena v ohraničené oblasti - funkce $E_b(x, y)$ tvoří „jezířko“ s minimem uvnitř.

3.2.3.1. Extrémy v ekvatoriální rovině

Tím, že jsme v ekvatoriální rovině $y = 0$ dodefinovali funkci $E_b(x, y)$ také pro body pod singularitou $a < 0$, viz (3.26), získáme maximum v místě Kerrovy singularity $[x, y] = [a, 0]$. Pro malé hodnoty proudu $J < a$ také sedlo na $x = J$. Tyto body leží pod vnějším horizontem pro případ Kerrovy BH.



Obrázek 3.8. Existence extrémů funkce $E_b(r, \theta)$ v ekvatoriální rovině v závislosti na parametru a . Černé křivky udávají pozici horizontů a ohraničují vyšrafovanou dynamickou oblast. Šedou barvou je vyznačen region, kde funkce je $J_{(\text{E})\text{eq}}^2(r)$ kladná - zde mohou existovat extrémů funkce $E_b(r, \theta)$. Oblast výskytu maxim funkce $E_b(r, \theta)$ je od oblasti minim oddělena tlustou černou čarou - jedná se o extrémů funkce $J_{(\text{E})\text{eq}}^2(r)$, viz obr. 3.7. Tento obrázek slouží ke klasifikaci možných typů chování funkce $E_b(r, \theta)$ pro Kerrové BH i NS.

Nyní vyšetříme extrémů funkce $E_b(x, y)$ v ekvatoriální rovině nad singularitou $x > a$. V této oblasti můžeme bez problémů používat souřadnici r místo eliptické x a místo extrémů funkce $E_b(x, y)$ vyšetřovat funkci $E_b(r, \theta)$.

V ekvatoriální rovině $\theta = \pi/2$ dostáváme z rovnic pro existenci stacionárních bodů (3.31-3.32) podmínku vyjádřenou vzhledem k parametru J

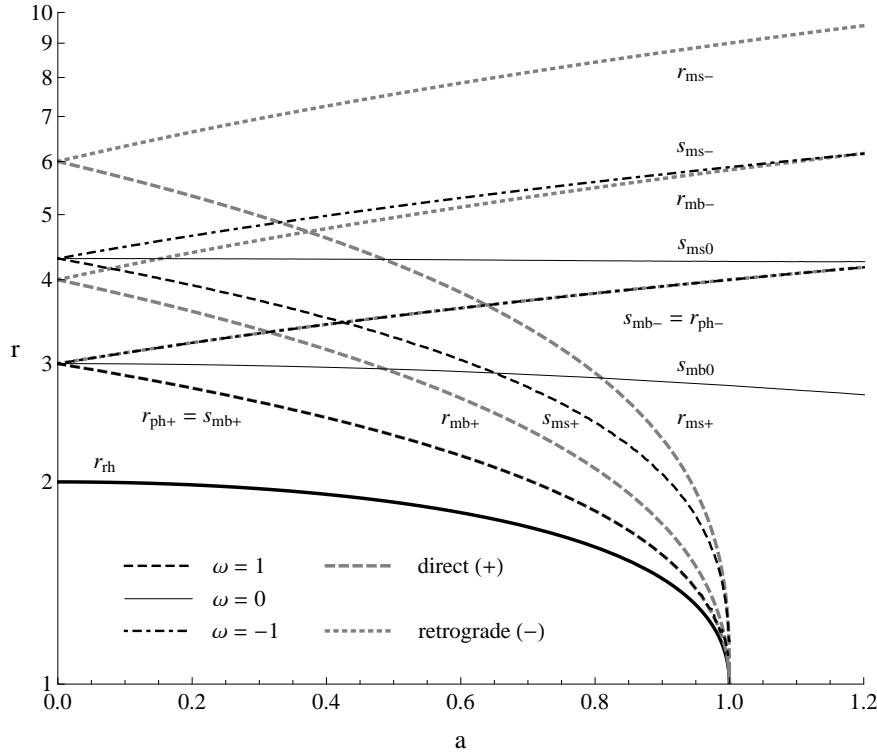
$$J = J_{(\text{E})\text{eq}}^2(r) \equiv J_{(\text{E})r}^2(r, \pi/2), \quad (3.35)$$

kde jsme zavedli funkci

$$J_{(\text{E})\text{eq}}^2(r) = \frac{(r-1)(\omega^2+1)(a^2(r+2)+r^3)^2}{4a\omega\sqrt{\Delta}(a^2+3r^2) + (\omega^2+1)(a^2r(r^2-3r+6) - 2a^4 + r^5 - 3r^4)}. \quad (3.36)$$

Funkce $J_{(\text{E})\text{eq}}^2(r)$ je pro významné kombinace parametrů a, ω ukázána na obr. 3.7. Zvolený proud J tvořící přímkou protíná funkci $J_{(\text{E})\text{eq}}^2(r)$ a tím určuje počet a pozici stacionárních bodů funkce $E_b(r, \theta)$. Vidíme, že pro malé hodnoty proudu J extrémů existovat nemusí, pro vyšší hodnoty může existovat extrémů více.

Je vhodné určit i extrémů funkce $J_{(\text{E})\text{eq}}^2(r)$, s jejichž pomocí můžeme rozlišovat mezi maximy a minimy funkce $E_b(r, \theta)$. Tato vlastnost plyne ze spojitosti funkce $E_b(r, \theta)$ - mezi dvěma maximy musí ležet minimum. Má-li například funkce $J_{(\text{E})\text{eq}}^2(r)$ na r_{\min} minimum J_{\min} pak pro $J > J_{\min}$ v okolí bodu r_{\min} existují dva stacionární body - maximum a minimum pro funkci $E_b(r, \theta)$. Pro $J = J_{\min}$ bude v r_{\min} inflexe E_b . Pokud proud snížíme $J < J_{\min}$ extrémů funkce $E_b(r, \theta)$ v okolí bodu r_{\min} zmizí. Existence extrémů funkce $J_{(\text{E})\text{eq}}^2(r)$ v závislosti na Kerrově

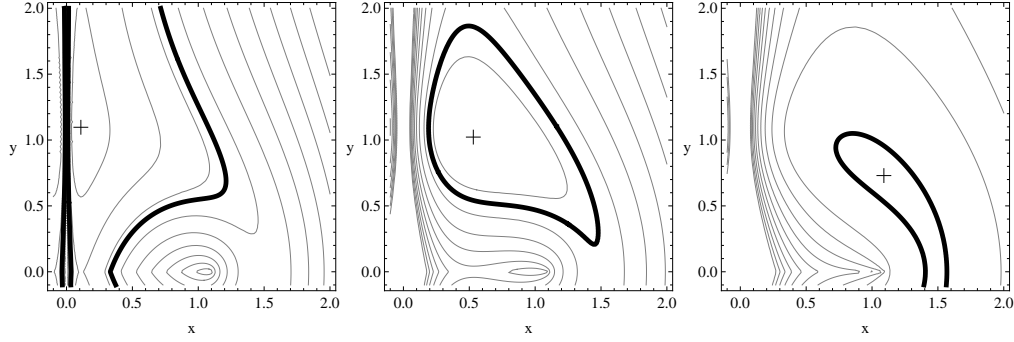


Obrázek 3.9. Významné poloměry pro pohyb kruhové struny v Kerrově metrice ve srovnání s poloměry kruhových ekvatoriálních orbit částic. Tučně je vyznačen vnější horizont BH r_h , dále pak fotonová r_{ph} , mezní vázaná r_{mb} a mezní stabilní r_{ms} orbita pro pohyb částic [16]. Čárkovaně jsou nakresleny orbity prográdní (direct (+)) obíhající ve směru rotace Kerrové metriky, tečkovaně pak orbity retrográdní (retrograde (-)) obíhající v protisměru. Mezní stabilní pozice kruhové struny s_{ms} je určena minimem funkce $J_{(E)eq}(r)$, a mezní vázaná pozice s_{mb} pak minimální hodnotou souřadnice r pro kterou je funkce $J_{(E)eq}(r)$ ještě definována, viz obr. 3.7. Písmeno s je pro poloměr použito kvůli přehlednosti.

rotačním parametru a je uvedena na obr. 3.8. Zde vidíme, že pro $\omega \in \{-1, 1\}$ existují pouze dva rozdílné typy chování extrémů pro $E_b(r, \theta)$: Kerr BH a Kerr NS, nicméně pro $\omega = 0$ máme typy tři Kerr BH, Kerr NSa a Kerr NSb. Jinými slovy, můžeme rozlišit tři typy ($\omega \in -1, 0, 1$) chování funkce $E_b(r, \theta)$ v ekvatoriální rovině pro Kerr BH (viz obr. 3.7(b,c,d)). Pro Kerr NS existují typy čtyři (viz obr. 3.7(e,f,g,h), typ $\omega = 0$ má dva podpřípady: případ $1 < a < a_{crit}$ a případ

$$a_{crit} \doteq 1.169052. \quad (3.37)$$

Pozice co nejbližší horizontu, na nichž může být struna v klidu, určíme opět z průběhu funkce $E_b(x, y)$. Pro Kerrový BH máme v ekvatoriální rovině $y = 0$



Obrázek 3.10. Vývoj „jezírek“ - uzavřené hranice $E = E_b(x, y)$ (černá tlustá křivka) pro strunu s energií E , v okolí mimo ekvatoriálního minima (černý křížek) funkce $E_b(x, y)$. Šedé vrstevnice značí hranice pro pohyb struny s jinou energií a poskytují tak pohled na tvar funkce $E_b(x, y)$. Kerrova singularita se nalézá v bodě $[a = 1.1, 0]$. Na prvním obrázku má struna energii větší než $E > 2J$ a může jak utéci do nekonečna, tak i přejít přes ekvatoriální rovinu. Na druhém obrázku již tato energetická podmínka splněna není a struna je uzavřena v mimo ekvatoriálním jezírku. Na posledním obrázku jsou obě mimo ekvatoriální jezírka propojena.

nestabilní pozici s_{mb} v maximum $E_b(x)$ a stabilní pozici s_{ms} v minimum $E_b(x)$; tyto poloměry struny svými vlastnostmi odpovídají mezní vázané r_{mb} a mezní stabilní r_{ms} orbite pro pohyb částic na kruhových drahách [16].

Pro $0 \leq a < 1$ a $\omega = \pm 1$ platí, že strunový mezní vázaný poloměr s_{mb} je roven fotonové orbite r_{ph} a strunový mezní stabilní poloměr s_{ms} leží mezi r_{mb} a r_{ms} , viz obr. 3.9. Připomeňme, že hodnota $\omega = 1$ odpovídá pozitivnímu momentu hybnosti kruhové struny L , hodnota $\omega = -1$ negativnímu L . Pro případ $\omega = 0$, struna nemá moment hybnosti $L = 0$, viz rovnice (1.16) a (1.29).

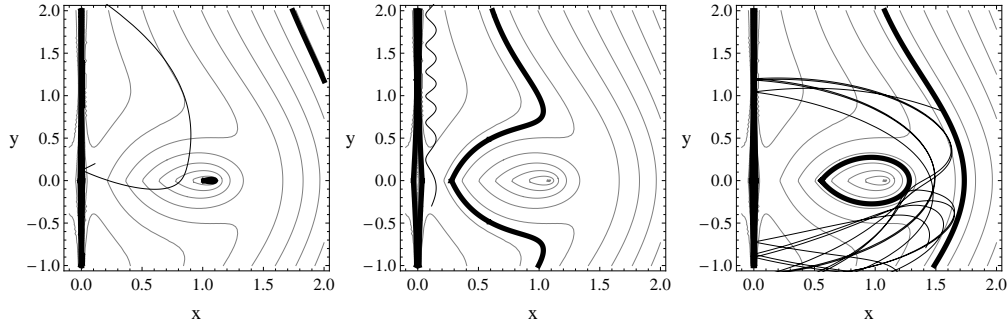
3.2.3.2. Extrémy mimo ekvatoriální rovinu

K nalezení stacionárních bodů funkce $E_b(x, y)$ mimo ekvatoriální rovinu použijeme vztah (3.30)

$$J_{(E)r}^2(r, \theta) = J_{(E)\theta}^2(r, \theta), \quad (3.38)$$

kde připouštíme pouze kladné hodnoty funkcí $J_{(E)r}^2, J_{(E)\theta}^2$ (3.31-3.32). Bohužel uvedená podmínka (3.38) vede na velice komplikovanou implicitní funkci souřadnic r, θ a explicitní výraz pro pozici mimo ekvatoriálních stacionárních bodů nebyl nalezen - musíme si vystačit pouze s numerickými výpočty.

Jednoduchou úvahou zjistíme, že nejnižší část funkce $E(x, y)$ leží v okolí počátku souřadnic, kde je gravitační působení nejsilnější. Efekt proudu na struně vytvoří snížení v ekvatoriální rovině na $x \sim J$, zároveň pro $J < a$ existuje maximum v místě singularity na $x = a$. Popsané efekty jsou zodpovědné za existenci mimo ekvatoriálních minim („jezírek“) a dále plyne, že tato minima mohou existovat pouze v okolí počátku souřadnic a pro proudy $J < a$. Vzhledem k symetrii



Obrázek 3.11. Příklady pohybu struny v okolí Kerrovy singularity umístěné v bodě $[a, 0]$. Černá klikatá čára je trajektorie struny s energií E , tlustá křivka je hranice pro pohyb $E = E_b(x, y)$. Šedé vrstevnice jsou hranice pro jiné energie.

$y \leftrightarrow -y$ modelu vyskytují se tato jezírka vždy v páru. Jiné extrémy než minima, funkce $E_b(x, y)$ mimo ekvatoriální rovinu nemá.

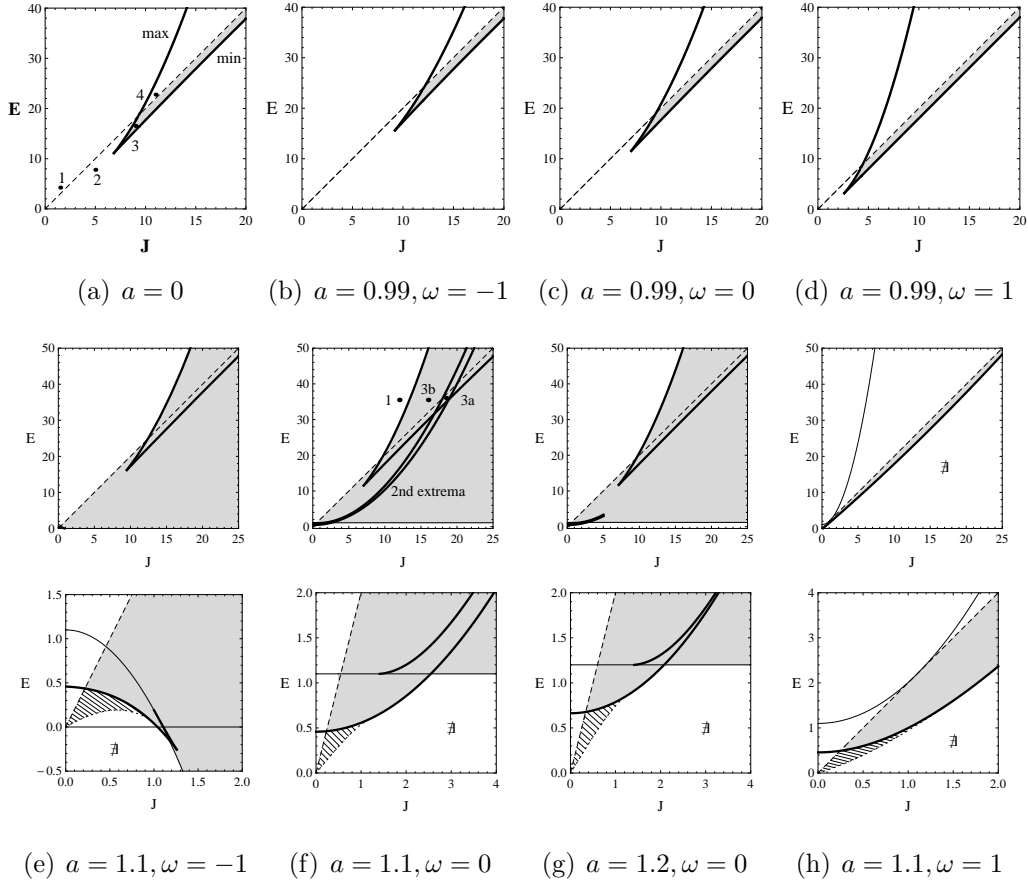
3.2.4. Klasifikace pohybu struny v poli Kerrovy BH a NS

Pro pohyb strun v okolí Kerrovy BH existují čtyři možné typy hranice, klasifikujeme je podle dvou vlastností: zda-li struna může uniknout do nekonečna ve směru y a zda-li může být černou dírou pohlcena. Příklady všech čtyř možných typů funkce hranice pohybu $E_b(x, y)$ pro BH jsou na obr. 3.2.

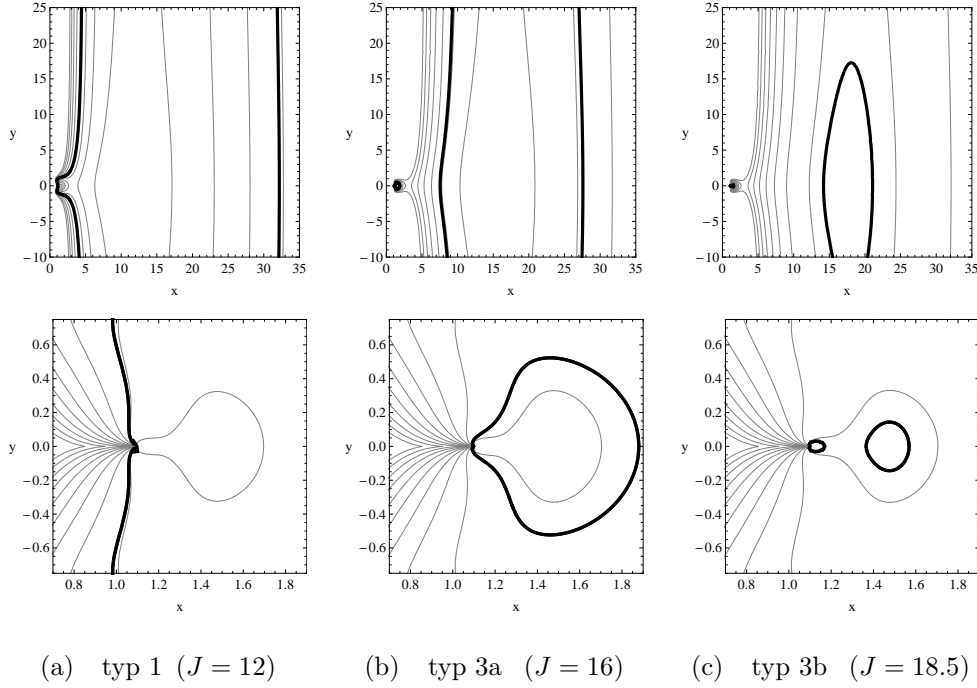
V případě Kerrovy NS možnost pohlcení zaniká, z hlediska topologie hranice pohybu zbývá jen možnost, zda-li struna může uniknout do nekonečna ve směru y či nikoliv. Ovšem samotný průběh funkce $E_b(x, y)$ je pro NS mnohem komplikovanější, než pro BH, jelikož nyní má struna přístup i do oblasti, jež byla skryta pod vnějším horizontem. Pro NS existují nové možnosti hranice pohybu - mimo ekvatoriální jezírka a jezírka poblíž singularity. Příklady jednotlivých typů funkce hranice pohybu $E_b(x, y)$ pro NS jsou na obr. 3.13

Možné chování hranice pohybu struny v Kerrově BH a NS metrice vzhledem k parametrům a a ω můžeme klasifikovat následovně (viz obr. 3.12)

- *Schwarzschildova BH*
Pro nerotující ($a = 0$) BH existují stacionární body pouze v ekvatoriální rovině. Funkce $J_{(E)eq}^2(x)$, určující extrémy, má pouze jedno minimum J_{\min}^2 - viz obr. 3.8(a). Pro proudy $J > J_{\min}$ existuje vždy maximum a minimum pro hranici pohybu $E_b(x, 0)$, pro proudy $J < J_{\min}$ žádné extrémy funkce $E_b(x, 0)$ neexistují. V případě pohybu struny v okolí Schwarzschildovy BH můžeme mít čtyři typy hranice pohybu, viz obr. 3.2. Celková klasifikace vzhledem k parametrům E, J je zachycena na obr. 3.12(a).
- *Kerr BH $\omega = -1$*
V případě struny s negativním momentem hybnosti L , viz. rovnice (1.15) a (1.29), máme extrémy $E_b(x, y)$ pouze v ekvatoriální rovině. Funkce $J_{(E)eq}^2(x)$ má opět pouze jedno minimum J_{\min}^2 nad vnějším horizontem, obr. 3.8(b).



Obrázek 3.12. Klasifikace možných hranic pro pohyb struny v Kerrově metrice z pohledu nejdůležitějších parametrů - energie E a proudu J . Tlusté černé čáry značí maxima a minima funkce energetická hranice pohybu $E_b(x, y)$ v ekvatoriální rovině. Minima $E_b(x, y = 0)$ určují, kde bude vytvořeno jezírko, maxima $E_b(x, y = 0)$ zabraňují otevření hranice směrem k horizontu a polapení struny. Možnost struny utéci do nekonečna podél osy y je vyznačena čárkovanou přímkou $E = 2J$, pod touto křivkou nemá struna dostatek energie k úniku. Šedou je vyznačena oblast existence „jezírek“ - uzavřených hranic pro trajektorii struny, omezujících pohyb struny pouze na určitou oblast. Tenká černá čára u Kerr NS označuje hodnotu funkce energetická hranice pohybu $E_b(r \rightarrow 0, \theta = \pi/2)$ tedy těsně pod singularitou. Čísla v grafu uvedená, odkazují na konkrétní ukázky hranice $E = E_b(x, y)$ na obr. 3.2 (pro BH) a 3.13 (pro NS). Oblast nepřipustných konfigurací parametrů E a J je označena symbolem \emptyset . Pro Kerrové BH (první řada obrázků) není situace odlišná od již zkoumaného pohybu kruhové struny ve Schwarzschildově metrice, viz obr. 3.1. Pro Kerrové BH se pouze posunují extrémy funkce $E_b(x, y)$ v závislosti na parametrech a a ω . Pro Kerrové NS (dolní dvě řady obrázků) je situace komplikovanější, zvláště pro oblast malých hodnot parametrů E, J (poslední řada obrázků). Může se stát $\omega \in \{-1, 0\}$ obr. (e-g), že minimum funkce $E_b(x, y)$ (tlustá čára) není nejmenší možnou hodnotou energie struny E , ale musíme použít $E_b(r \rightarrow 0, \theta = \pi/2)$ (tenká čára), což ukazuje na existenci záporných energií pro pohyb struny s $\omega = -1$ v Kerr NS, viz obr 3.5. Pro případ $\omega = 1$ obr. (h) neexistuje maximum funkce $E_b(x, y)$ pro žádnou kombinaci parametrů E, J . Šrafováním je vyznačena oblast existence minim („jezírek“) mimo ekvatoriální rovinu.



Obrázek 3.13. Různé typy hranice pohybu $E = E_b(x, y)$ pro strunu s $E = 35.5$ v okolí Kerrovy NS ($a = 1.1$), viz obr. 3.12. Ostatní šedé vrstevnice patří strunám s jinou energií.

Pro proudy $J > J_{\min}$ existuje vždy maximum a minimum pro hranici pohybu $E_b(x, 0)$, pro proudy $J < J_{\min}$ žádné extrémy funkce $E_b(x, 0)$ neexistují. Jako v případě pohybu struny v okolí Schwarzschildovy BH i zde můžeme mít pouze čtyři typy hranice pohybu, viz obr. 3.2. Negativní moment hybnosti L zapříčiňuje posunutí pozice nejbližšího možného jezírka dále od vnějšího horizontu BH. Celková klasifikace hranic pro pohyb struny, vzhledem k důležitým parametrům E, J , je zachycena na obr. 3.12(b).

- *Kerr BH* $\omega = 0$
Kruhová struna s nulovým momentem hybnosti $L = 0$, v poli Kerrovy BH. Popis chování funkce $E_b(x, y)$ je stejný jako pro předchozí případ, celková klasifikace vzhledem k parametrům E, J na obr. 3.12(c).

- *Kerr BH* $\omega = 1$
Pro strunu s pozitivním momentem hybnosti L je situace obdobná jako v předchozích dvou uvedených případech. Je nutné poznamenat, že maximum funkce $E_b(x, 0)$ leží pro $a = 0.99$ již velice blízko vnějšího horizontu BH a tak „jezírka“ ve funkci $E_b(x, y)$ (polapené trajektorie struny v uzavřené oblasti) mohou existovat i těsně nad vnějším horizontem BH, viz obr. 3.8(d). Tento efekt je způsoben pozitivním momentem hybnosti L a odpovídá podobnému jevu, nastávajícímu pro pohyb částic obíhajících BH po prográdní dráze - vidíme posouvání orbit se zvyšujícím se rotačním parametrem a směrem k

horizontu BH [16], viz obr 3.9. Celková klasifikace pohybu struny pro tento případ je na obr. 3.12(d).

- *Kerr NS* $\omega = -1$
Struna s negativním momentem hybnosti L v poli Kerrovy NS. Pro všechny NS mohou existovat extrémní funkce $E_b(x, y)$ jak v ekvatoriální rovině tak i mimo ni. Mimo ekvatoriální minima existují pouze pro malé hodnoty proudu $J < a$, a jsou umístěny v okolí Kerrovy singularity. Tato minima existují pro všechny hodnoty parametru ω - pro malé proudy J závisí funkce E_b na parametru ω velmi slabě viz obr. 3.5. Funkce $J_{(E)e}^2(r)$ má v tomto případě dva extrémní J_{\min} a J_{\max} viz obr. 3.8(e). Pro $J < a$ má funkce E_b pouze minimum, které je zároveň nejnižším bodem, viz čárkovanou křivku na obr. 3.5(b). Pro $a < J < J_{\max}$ existuje pro funkci E_b v okolí singularity jak minimum tak i maximum. Pro $J_{\max} < J < J_{\min}$ funkci E_b extrémní nemá a jejím nejnižším bodem se stává pozice pod singularitou, kde E_b může nabývat i záporných hodnot, viz obr. 3.5(c). Příklad trajektorie struny s negativní energií je zobrazen na obr. 3.6(a). Pro $J_{\min} < J$ již extrémní pro funkci E_b existují, viz shrnutí na obr. 3.12(e).
- *Kerr NS* $\omega = 0, 1 < a < a_{\text{crit}}$
Kruhová struna bez momentu hybnosti $L = 0$ pohybující se v okolí Kerrovy NS. Opět existují mimo ekvatoriální minima pro malé proudy J . Extrémní v ekvatoriální rovině jsou opět určeny funkcí $J_{(E)\text{eq}}^2$, zde ovšem existuje pouze minimum J_{\min} , viz obr. 3.8(f). Jelikož pro $r \rightarrow 0$ platí $J_{(E)\text{eq}}^2 = 2$, má funkce E_b pro $J < \sqrt{2}$ pouze minimum v okolí singularity, viz černou křivku na obr. 3.5(b); pro $\sqrt{2} < J$ se pak objeví navíc i maximum E_b v těsné blízkosti singularity - obr. 3.5(c). Pro $J > J_{\min}$ objevují se standardní extrémní funkce E_b v okolí bodů $x = J$. V tomto případě mohou současně existovat v ekvatoriální rovině tři oddělené uzavřené oblasti pro pohyb struny - dvě „jezířka“ funkce $E_b(x, y)$ v okolí singularity a „jezířko“ v okolí $x = J$, viz případ 3b na obr. 3.12(f) a 3.13. Konkrétní další příklady možných hranic pohybu pro NS můžeme sledovat na obr. 3.13
- *Kerr NS* $\omega = 0, a > a_{\text{crit}}$
Rozdíl mezi předchozím uvedeným případem (f) a nynějším (g) je pouze v chování funkce $J_{(E)\text{eq}}^2$. Zde existuje navíc i maximum J_{\max} , a proto minimum funkce E_b poblíž singularity zaniká pro hodnoty $J > J_{\max}$ - druhé jezírko v okolí singularity a jezírko v okolí $x = J$ mohou existovat současně, pouze pokud $J_{\max} > J_{\min}$, viz obr. 3.12(g).
- *Kerr NS* $\omega = 1$
Kerrová NS obsahující strunu s pozitivním momentem hybnosti L . Jako pro ostatní NS, i zde existují mimo ekvatoriální minima pro malé proudy J . Extrémní v ekvatoriální rovině jsou zcela určeny funkcí $J_{(E)\text{eq}}^2$, jenž nemá v tomto případě žádné extrémní - pro všechny hodnoty parametru J bude mít vždy funkce E_b pouze minimum určující jezírka v ekvatoriální rovině, viz. obr. 3.7(h) a 3.12(h).

3.3. Vliv kosmologické konstanty

Vliv kosmologické konstanty Λ na pohyb kruhové struny se skalárním polem v de Sitterově (dS) a Schwarzschild–de Sitterově (SdS) prostoročase je podrobně popsán v práci [10] (viz příloha 1), zde se omezíme na přehled nejdůležitějších a nejzajímavějších závěrů.

Pro SdS metriku má charakteristická funkce $A(r)$ v obecné sféricky symetrické metrice (3.1) tvar

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2. \quad (3.39)$$

Opět budeme pracovat v bezrozměrných souřadnicích, zavedeme i bezrozměrný kosmologický parametr

$$\lambda = \frac{1}{3}\Lambda M^2. \quad (3.40)$$

V následujících obrázcích je používána neúměrně veliká hodnota kosmologického parametru $\lambda = 10^{-4}$, a to proto, aby bylo možno dobře zobrazit požadované efekty λ . V realistických situacích, např. pro extrémní quasar *TON618* s hmotností centrálního objektu $M \sim 6.6 \times 10^{10} M_\odot$, máme pouze $\lambda \sim 10^{-24}$ ([17]).

Horizonty SdS prostoročasu získáme z podmínky $A(r) = 0$, pro $\lambda < 1/27$, máme kosmologický r_c a černoděrový r_h horizont daný relacemi [18]

$$r_h = \frac{2}{\sqrt{3\lambda}} \cos \frac{\pi + \xi}{3}, \quad r_c = \frac{2}{\sqrt{3\lambda}} \cos \frac{\pi - \xi}{3}, \quad \xi = \cos^{-1} \left(3\sqrt{3\lambda} \right). \quad (3.41)$$

Oba horizonty splývají pro $\lambda = 1/27$, pro $\lambda > 1/27$ dostáváme nahou singularitu. Podmínka $A'_r = 0$ určuje takzvaný statický poloměr

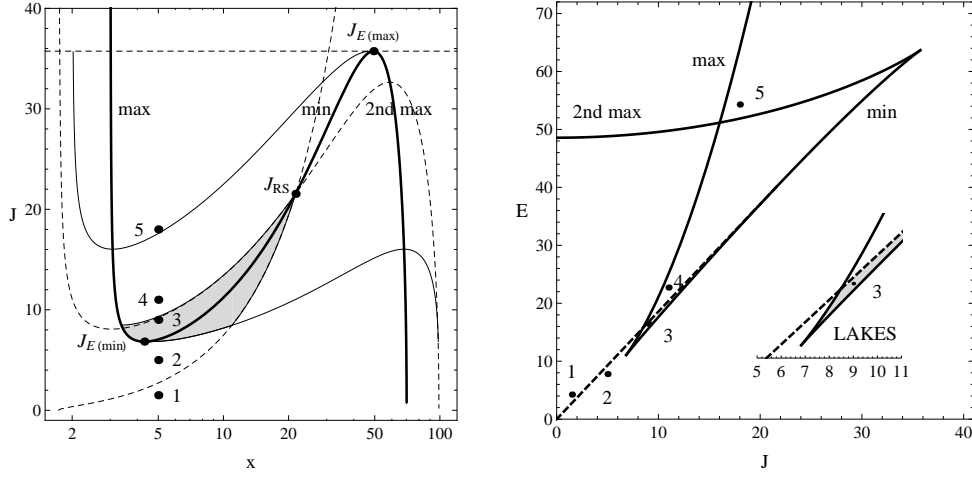
$$r_s = \lambda^{-1/3}, \quad (3.42)$$

na němž jsou přitažlivá síla gravitace a repulzivní síla kosmologické konstanty vyrovnány [18]. V dS a SdS prostoročasech existuje otevřená hranice pro pohyb struny do nekonečna ve směru x , v tomto případě repulzivní charakter kosmologické konstanty Λ překoná sílu tenze struny μ a poloměr struny roste do nekonečna, viz druhý obr. 3.15.

Funkce energetická hranice pohybu kruhové struny je pro případ SdS prostoročasu dána

$$E_b(r, \theta) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} - \lambda r^2\right)} \left(\frac{J^2}{r \sin \theta} + r \sin \theta\right). \quad (3.43)$$

Na obou horizontech platí $A(r) = 0$, nemůžeme sestavit hranici pro pohyb pro oblast $A(r) < 0$ - funkce $E_b(r, \theta)$ zde není definovaná. Přesto se struna může v oblasti $A(r) < 0$ pohybovat.



Obrázek 3.14. Klasifikace možných typů hranice pohybu ve SdS prostoročase ($\lambda = 10^{-4}$). Na levém obrázku vidíme funkci $J_E(x)$ (tlustá černá čára) určující pozici extrémů funkce $E_b(r, \theta)$ v ekvatoriální rovině; čárkovaně jsou vyznačeny funkce $J_{L1, L2}(r)$ vymezující možnost struny utéci do nekonečna podél osy y . Oblast „jezírek“, uzavřených hranic pohybu odkud není úniku, je znázorněna šedě. Na pravém obrázku je situace zachycena z pohledu parametrů J a E . Tlustou černou čarou je vyznačeno maximum a minimum funkce $E_b(r, \pi/2)$, čárkovaná přímka je podmínka $E = 2J$ pro únik struny do nekonečna v y směru. Jednotlivá čísla značí ukázky konkrétních typů hranice pro pohyb struny $E = E_b(r, \theta)$ na obr. 3.2 a 3.15.

Podmínka pro existenci stacionárních bodů (1.32) (možných extrémů) funkce $E_b(r, \theta)$ vede na rovnici pátého stupně pro souřadnici r

$$-\frac{2}{3}\Lambda r^5 + r^3 - r^2 - J^2 r + 3J^2 = 0, \quad (3.44)$$

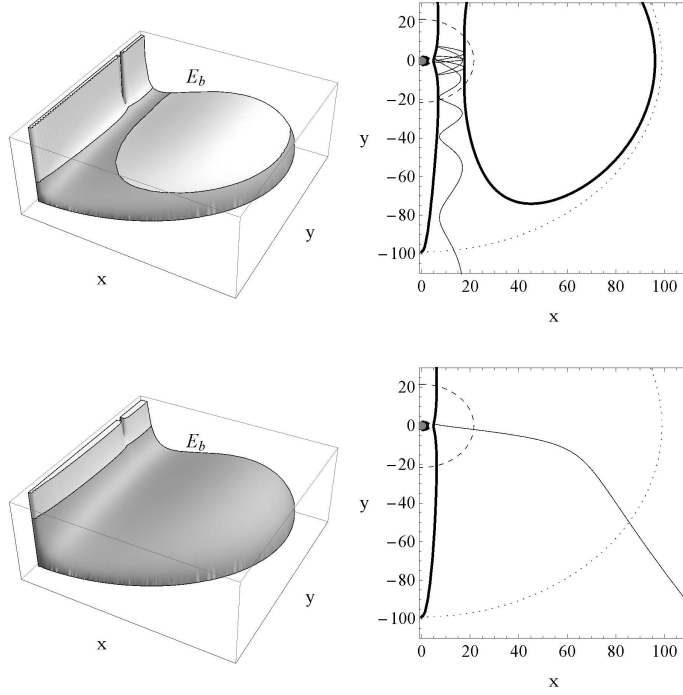
příčemž podmínka (1.33) vede nejenom k $\theta = \pi/2$, ale navíc i k $A'_r = 0$. Nová podmínka znamená existenci stacionárních bodů funkce $E_b(r, \theta)$ také na statickém poloměru r_s , viz (3.42). Statický poloměr r_s hraje stejnou fundamentální roli pro pohyb struny jako pro pohyb částic [18] v SdS prostoročase. Zde statický poloměr udává maximální možnou velikost „jezírek“; nad statickým poloměrem již struna nemůže být klidu a při svém pohybu je kruhová struna kosmologickou konstantou urychlována podél osy y .

Rovnici (3.44) můžeme vyjádřit pro souřadnici x ve tvaru

$$J^2 = J_E^2 \equiv \frac{x^2(x - 1 - 2\lambda x^3)}{x - 3}, \quad (3.45)$$

přůběh funkce $J_E(x)$ je uveden na obr. 3.15. Extrémy funkce $J_E^2(x)$ jsou určeny podmínkou

$$\lambda = \lambda_E(x) \equiv \frac{x^2 - 5x + 3}{x^3(4x - 15)}. \quad (3.46)$$



Obrázek 3.15. Ukázka hranice pohybu $E_b(x, y)$ ve SdS metrice. Na prvním obrázku vidíme modifikaci typu 4 ($J = 11$), viz obr. 3.2; na druhém ($J = 17$) je nový typ 5 - případ exponenciální expanze poloměru struny způsobené λ . Uvedeny je statický poloměr r_s (čárkovaně) i kosmologický horizont r_c (tečkovaně). Struna v obou případech startuje v klidu z bodu $[x, y] = [5, 2]$.

Pro malé hodnoty kosmologického parametru $\lambda < \lambda_{\text{trap}} = 0.00497$ [10] má funkce $J_E^2(x)$ dva extrémny - minimum $J_{E(\min)}$ a maximum $J_{E(\max)}$ - viz obr. 3.14.

Možnost kruhové struny uniknout podél osy y do nekonečna můžeme vyjádřit vzhledem k parametru J pomocí funkcí

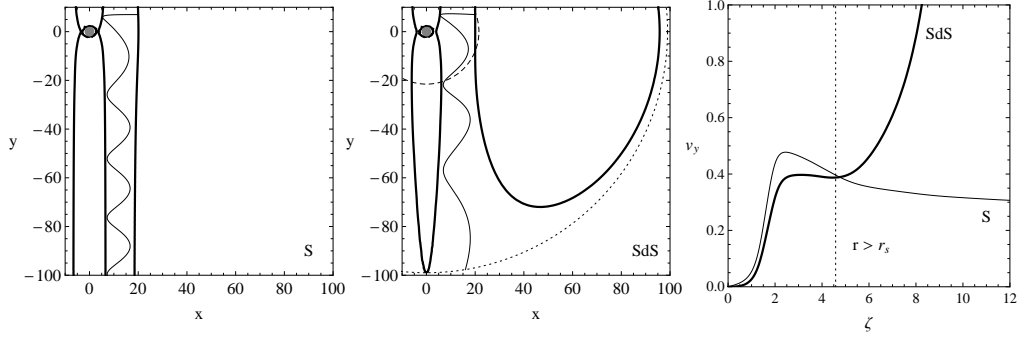
$$J_{L1, L2}(x) = \frac{x(\sqrt{x(1 - 3\lambda^{1/3})} \pm \sqrt{2 - 3x\lambda^{1/3} + \lambda x^3})}{\sqrt{x - 2 - \lambda x^3}}. \quad (3.47)$$

Průběh obou funkcí J_{L1} a J_{L2} je ukázán na obr. 3.14, kde vidíme že se uvedené funkce protínají i s funkcí $J_E(r)$ v bodě $x_R = J$ (na statickém poloměru $r = r_s$) - průsečík je označen jako J_{RS} .

Uzavřené hranice pro pohyb struny - „jezířka“, mohou existovat za splnění podmínky na hodnotu parametru J

$$J_{E(\min)} < J < J_{RS}. \quad (3.48)$$

Pro hodnoty $J < J_{E(\min)}$ má struna nedostatečný moment hybnosti, a tak je hranice pro pohyb struny otevřená směrem k černoděrovému horizontu r_h . Pro



Obrázek 3.16. Vliv kosmologické konstanty na pohyb struny - srovnání trajektorií v okolí Schwarzschildovy a SdS černé díry. V obou případech struna startuje z bodu $[x, y] = [20, 7]$ s parametry $J = 11$ a $E \doteq 24$. Podstatné rozdíly v rychlostech struny podél osy y pro oba případy jsou až nad statickým poloměrem r_s . Zde začíná převažovat působení kosmické repulze, jež urychluje v SdS strunu ve směru y („natahuje trajektorii“). Hranice pro pohyb struny $E = E_b(r, \theta)$ (silná čára) se viditelně odlišují také teprve až pro $r > r_s$ (čárkovaná kružnice).

$J > J_{E(\min)}$ je hranice omezující pohyb otevřená směrem k horizontu kosmologickému r_c .

Uvnitř „jezířka“ se nachází minimum funkce $E_b(x, y)$, kde struna může setrvat v klidu; nad statickým horizontem $r > r_s$ již žádná jezírka existovat nemohou a struna je urychlována směrem k kosmologickému horizontu. „Jezírka“ a stabilní minima funkce $E_b(x, y)$ existují pouze pro SdS prostoročas s kosmologickým parametrem menším než kritická hodnota $\lambda_{\text{trap}} \sim 0.00497$, což je zhruba o řád více než hodnota relevantní pro existenci stabilních kruhových geodetik $\lambda_{\text{ms}} \sim 0.000237$ pro pohyb částic ve SdS prostoročase [18].

Vzhledem k senzitivě pohybových rovnic (chaotický systém) na počáteční podmínky může i malá hodnota kosmologického parametru změnit konkrétní trajektorii struny. Statisticky (pro velký soubor trajektorií) není efekt kosmologické konstanty v okolí černoděrového horizontu velký, významným se vliv Λ stává až poté co struna překročí statický poloměr r_s . Zde pozorujeme exponenciální urychlení kruhové struny podél osy y ; kosmologický horizont r_c překročí struna s rychlostí světla, viz obr. 3.16.

Kapitola 4

Aplikace modelu - jety, chaos a QPOs

V této kapitole se pokusíme aplikovat prozkoumanou dynamiku kruhové struny se skalárním polem na některé astrofyzikálně zajímavé situace.

4.1. Urychlení kruhové struny podél osy y

Pohyb struny v plochem prostoročase (viz kapitola 2) je regulární a analyticky řešitelný - struna osciluje ve směru x a moment hybnosti pohybu struny ve směru y se zachovává. V silném gravitačním poli je ovšem pozorováno přelévání energie oscilací struny ve směru x do energie translačního pohybu ve směru y a naopak, tento efekt je nazván transmutací struny [7, 9, 10].

Transmutace struny funguje v obou směrech (viz obr. 4.1), je možné oscilace ve směru x zeslabit a strunu urychlit ve směru y , je také možné zvětšit oscilace struny v x a pohyb struny ve směru y zpomalit. Z astrofyzikálního hlediska by první situace, urychlování pohybu struny ve směru y , mohla sloužit k vysvětlení relativistických rychlostí pozorovaných ve výtryscích (jetech) [19] pozorovaných u aktivních galaxiích.

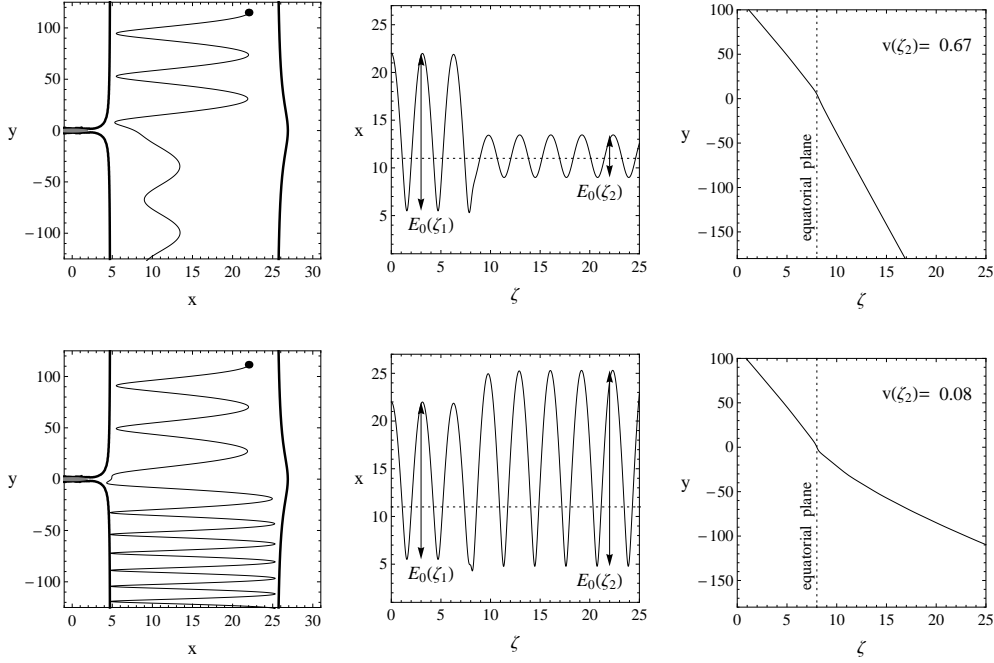
Nejprve je potřeba upřesnit definici rychlosti kruhové struny. Normovací podmínku na čtyřrychlost $U^\alpha U_\alpha = -1$ pro pohyb struny podél osy y , můžeme vyjádřit jako

$$g_{tt}\gamma^2 + g_{yy}u^2 = -1, \quad (4.1)$$

kde Lorentzovský γ factor ($1 \leq \gamma < \infty$) a y složka čtyřrychlosti u ($0 \leq u < \infty$) jsou určeny relacemi

$$U^t = \frac{dt}{dT} = \gamma, \quad U^y = \frac{dy}{dT} = u. \quad (4.2)$$

T je vlastní čas pozorovatele pohybujícího se strunou ve směru y . Tento pozorovatel není pevně přilepen na struně - neosciluje s ní ve směru x , týká se jej pouze pohyb struny podél osy y .



Obrázek 4.1. Efekt transmutace struny - na prvním řádku urychlení struny, na druhém řádku zpomalení. Černé křivky jsou trajektorie struny, tlustá čára vymezuje hranici pohybu $E = E_b(x, y)$. Zpočátku struna osciluje ve směru x a pohybuje se ve směru y s počáteční rychlostí $v \doteq 0.41$ směrem k horizontu černé díry, pro afinní parametr $\zeta \sim 8$ se struna přiblíží do oblasti silné gravitace nedaleko horizontu, kde dojde k transmutaci energií $E_x \leftrightarrow E_y$. Struna pak se změněnou rychlostí unikne podél osy y do nekonečna.

V plochem prostoročase platí $g_{tt} = -1$ a $g_{yy} = 1$, a rovnice (4.1) a (4.2) dávají klasické vztahy

$$\gamma^2 = u^2 + 1, \quad u = \gamma v, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2}, \quad v = \frac{dy}{dt}. \quad (4.3)$$

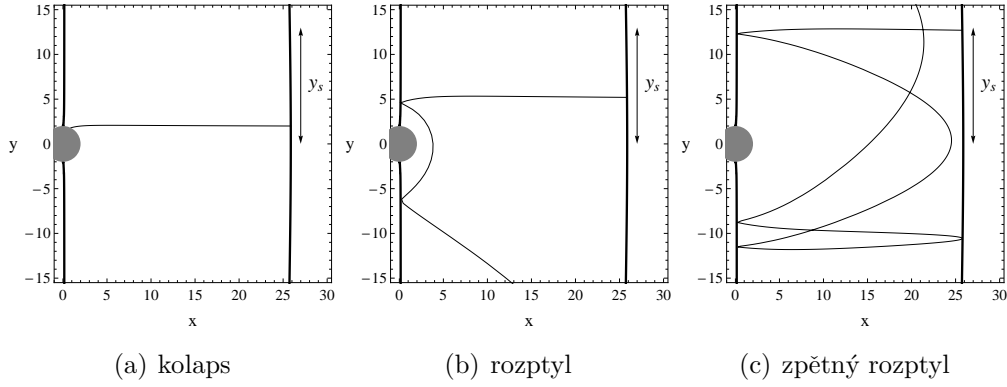
Souřadnicová rychlost v y směru v ($0 \leq v < 1$) používá souřadnicový čas t .

Pokud se struna při pohybu podél osy y zastaví ($u = 0$) a pouze osciluje ve směru souřadnice x , pak zachovávající se t komponenta čtyř-rychlosti (1.28) je

$$-E_0 = P_t = g_{tt} P^t = -\frac{dt}{d\zeta}, \quad (4.4)$$

kde E_0 budeme označovat jako „klidovou“ energii struny, viz (2.8). V tomto souřadném systému platí $dt = dT$ a z relace (4.4) dostáváme

$$dT = E_0 d\zeta. \quad (4.5)$$



Obrázek 4.2. Možné trajektorie struny startující z klidu s energií $E = 25$ a $J = 2$, ale z různých počátečních pozic y_s odhalující tak mechanismus urychlení na obr. 4.3.

Nyní z rovnice (2.8) můžeme vyjádřit klasický vztah mezi energiemi [9]

$$E = \gamma E_0, \quad (4.6)$$

kde E je celková energie kruhové struny pohybujícího se podél osy y s vnitřní energií E_0 . Zkombinujeme-li rovnice (2.8) a (4.6), pak y složka strunové čtyř-rychlosti struny je

$$P^y = \frac{dy}{d\zeta} = E_0 \frac{dy}{dT} = E_0 U^y. \quad (4.7)$$

Opět vidíme, že energie E_0 je klidovou energií kruhové struny.

Vzhledem k vlastnostem pro dynamiku struny $E_0 = x_i + x_o$, kde x_i je minimální a x_o maximální poloměr oscilací struny ve směru x (2.8), můžeme k určení rychlosti struny podél osy y použít Lorentzův gama faktor

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{E}{x_i + x_o}, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - (P^y/E)^2}, \quad (4.8)$$

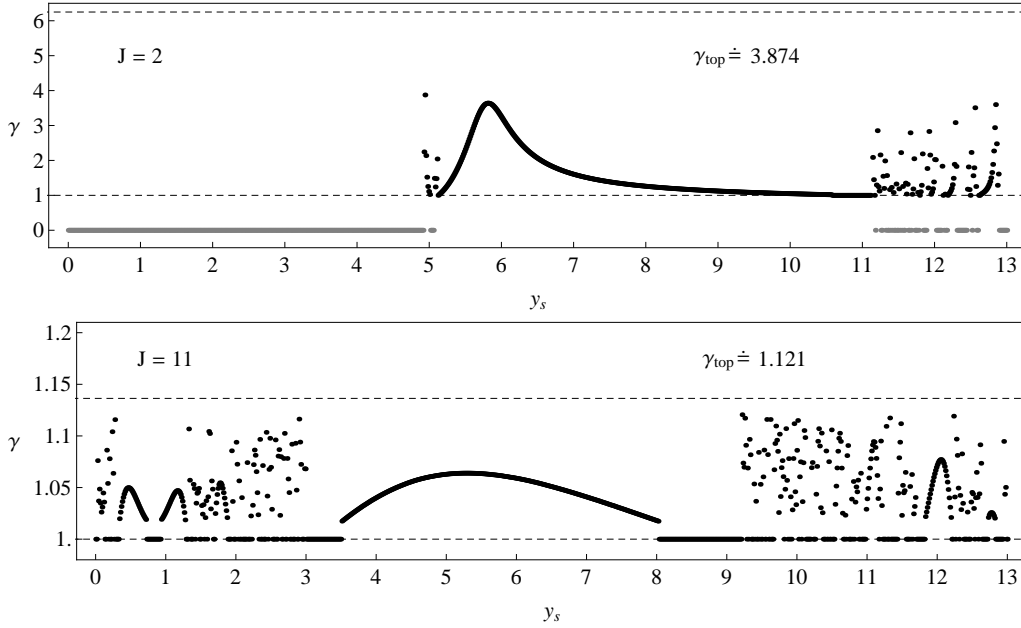
kde druhá uvedená relace plyne z rovnice (4.7). Obě rovnice mohou být použity k určení γ faktoru v asymptoticky plochém nekonečnu, pro urychlení struny ve Schwarzschildově metrice, viz obr. 4.3.

Ve Schwarzschildově metrice s charakteristickou funkcí $A(r)$ (3.2), můžeme vyjádřit energii struny (1.31) v kartézských souřadnicích

$$E^2 = A(r) (g_{xx}\dot{x}^2 + 2g_{xy}\dot{x}\dot{y} + g_{yy}\dot{y}^2) + A(r) x^2 \left(\frac{J^2}{x^2} - 1 \right)^2, \quad (4.9)$$

kde koeficienty metriky v x a y souřadnicích jsou

$$g_{xx} = \frac{x^2 + A(r)y^2}{A(r)(x^2 + y^2)}, \quad g_{yy} = \frac{y^2 + A(r)x^2}{A(r)(x^2 + y^2)}, \quad g_{xy} = xy \frac{1 - A(r)}{A(r)(x^2 + y^2)}, \quad (4.10)$$



Obrázek 4.3. Rozdělení rychlostí struny startující z klidu s energií $E = 25$ a proudem $J = 2$ (horní obrázek) a $J = 11$ (dolní obrázek), v poli nerotující BH. Počáteční souřadnice x je stanovena relací $E = E_b(x, y)$, souřadnici y plynule měníme. Trajektorie pohlcené horizontem BH jsou vyznačeny šedě, maximální vypočtené urychlení je uvedeno jako γ_{top} . Pro případ $J = 11$ s $\gamma_{\text{max}} \doteq 1.14$ jsou zobrazeny i trajektorie, které dosahují téměř úplné konverze oscilační energie a tak získají maximální možné urychlení $\gamma \sim \gamma_{\text{max}}$. Pro $J = 2$ je urychlení výrazně větší, neboť zde je $\gamma_{\text{max}} = 6.25$ - struna má dovoleno přetransformovat větší část své energie E .

kde $r^2 = x^2 + y^2$. Schwarzschildova metrika v x a y souřadnicích nabývá tvaru

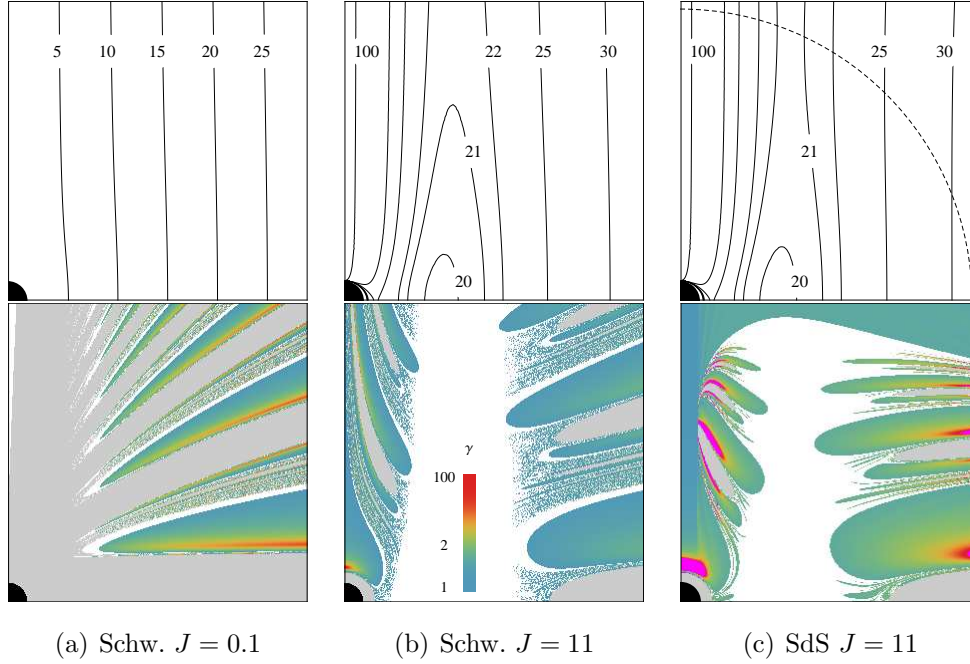
$$ds^2 = -A(r)dt^2 + g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dxdy + g_{yy}dy^2 + x^2d\phi^2. \quad (4.11)$$

Člen $g_{xy}\dot{x}\dot{y}$ v rovnici (4.9) způsobuje výměnu energie mezi E_x a E_y - transmutační efekt, viz srovnání vyjádření energie v plochem prostoročase (2.7). Koeficient metriky g_{xy} je významný pouze v okolí černé díry, ke transmutaci struny dochází v této oblasti.

Všechna energie z E_y módu může být přetransformována do E_x módu - oscilace struny ve směru x vzrostou na maximální úroveň a struna se zastaví v pohybu podél osy y . Všechna energie z E_x módu nemůže být přelita do E_y módu - vždy zde zůstává netransformovatelná vnitřní energie struny

$$E_{0(\text{min})} = 2J. \quad (4.12)$$

Pro strunu s konstantami pohybu, proudem J a energií E , dostáváme maximální urychlení ve směru y (co nejvyšší γ faktor (4.6)), pokud je klidová energie kruhové



Obrázek 4.4. Urychlení kruhové struny (γ faktor) pro klíčové hodnoty parametru $J = 0.1$ a $J = 11$. Je zobrazena oblast $(x, y) \in (0.1, 30) \times (0.1, 30)$ pro kterou je spočteno $9 \cdot 10^5$ barevně rozlišených trajektorií. Černě je znázorněna oblast pod horizontem, šedě trajektorie pohlcené BH a bíle trajektorie kterým se nepodařilo utéci do „nekonečna“ umístěném na $r = 10^3$ za dobu $\zeta = 200$. Rychlosti uniklých trajektorií v „nekonečnu“ jsou barevně rozlišeny dle zobrazené nelineární stupnice. Jednotlivé trajektorie z každého obrázku mají různou energii E v závislosti na jejich startovací pozici, viz horní řadu obrázků. Příklad SdS s $\lambda = 4 \times 10^{-5}$ ($r_s \doteq 29$, $r_c \doteq 157$) obsahuje i nadsvětelné rychlosti (fialová barva), jelikož příslušný γ faktor měříme na poloměru $r = 77$ pro statického pozorovatele. Statický poloměr r_s je vyznačen tečkovanou kružnicí.

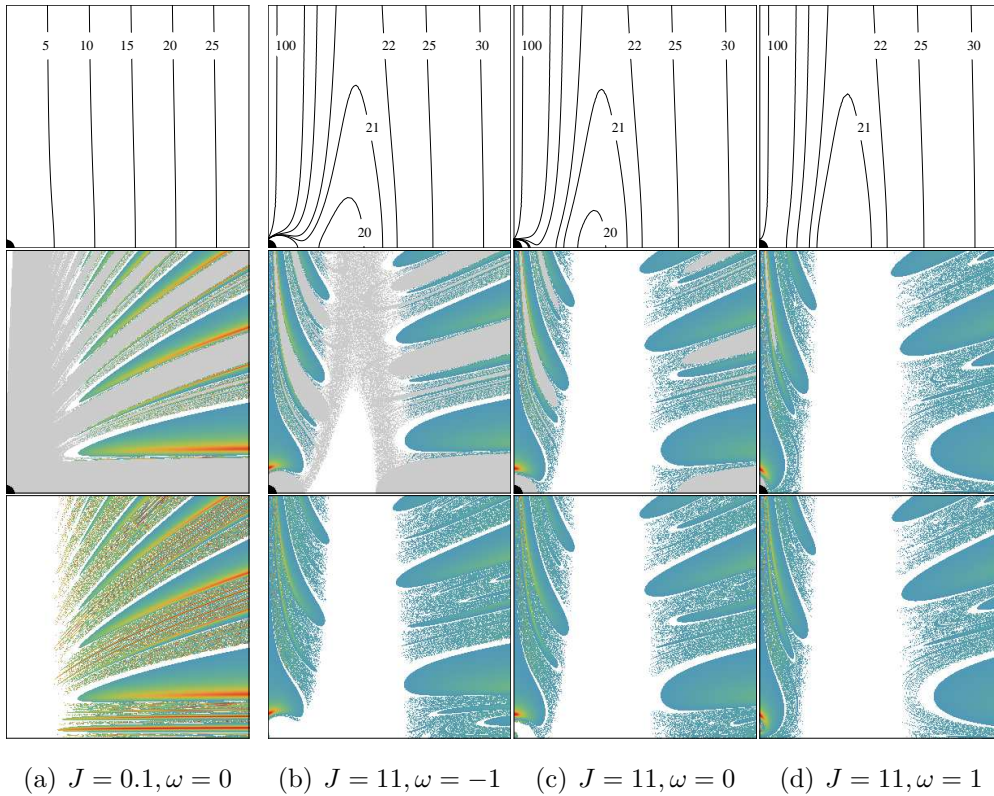
struny E_0 minimální (4.12). Proto existuje nejvyšší možné urychlení kruhové struny dané relací

$$\gamma_{\max} = \frac{E}{2J}, \quad (4.13)$$

a pro Lorentzův gama faktor urychlení struny platí $\gamma \in \langle 1, \gamma_{\max} \rangle$.

Největší akcelerace kruhové struny dosahujeme pro vysoké energie E a malé proudy J [11]. Konkrétně pro pevně danou energii $E = 25$ vidíme na obr. 4.3 větší urychlení pro proud $J = 2$ (dovolené $\gamma_{\max} = 6.25$, pozorované $\gamma_{\text{top}} \doteq 3.87$) než pro $J = 11$ (dovolené $\gamma_{\max} \doteq 1.14$, pozorované $\gamma_{\text{top}} \doteq 1.12$). Pro proudy $J \sim 0$ je možné teoreticky dosáhnout libovolně velkého γ faktoru pro rychlost podél osy y , například i $\gamma > 100$ [12].

Urychlení kruhové struny je možné testovat v různých geometriích. Prezentujeme urychlení ve Schwarzschildově geometrii (obr. 4.4(a-b)), ve SdS prostoročase



Obrázek 4.5. Vliv rotačního parametru a na urychlení kruhové struny v Kerrových BH $a = 0.99$ a NS $a = 1.1$. Nabízí se srovnání s obr. 4.4, který popisuje nerotující BH $a = 0$. Vliv parametru ω na dynamiku struny je pozorovatelný pouze v případě $J = 11$, pro hodnotu $J = 0.1$ je zcela zanedbatelný. Neexistence trajektorií pohlcených horizontem BH (šedá oblast) je výrazným rozdílem mezi urychlením v NS. Další rozdíly mezi urychlením v BH a NS, i mezi jednotlivými případy parametru ω , pozorujeme v okolí počátku souřadnic.

(obr. 4.4(c)) ukazujeme vliv kosmologické konstanty, zkoumáme i vliv rotace a v Kerrově metrice (obr. 4.5(a-d)).

Jsou uvedeny dvě klíčové hodnoty parametru J . Pro malou hodnotu $J = 0.1$, kde očekáváme velké urychlení a kde neexistují uzavřené hranice „jezířka“, omezující pohyb a zabráňující úniku struny; a pro hodnotu $J = 11$, kde již mohou „jezířka“ existovat. Spočteme trajektorii a výsledné urychlení struny startující z klidu, pro všechny body oblasti $(x, y) \in (0.1, 30) \times (0.1, 30)$. Jednotlivé trajektorie mají pevně stanovenou hodnotu parametru J , ale různou energii E danou podmínkou $E = E_b(x, y)$. Zde proto není vhodné přímé srovnání mezi urychlováním struny pro $J = 0.1$ a $J = 11$; jednotlivé případy odpovídají zcela odlišným hodnotám energie: $E \in (0, 28)$ pro $J = 0.1$ a $E \in (2, 1150)$ pro $J = 11$, viz první řadu grafů na obr. 4.4.

Ukazuje se, že významný transmutační efekt nastává pro silná gravitační pole, a to zvláště v případech, v nichž je funkce $E_b(x, y)$ velice strmá [12, 13]. Nahé sin-

	$a = 0$	$a = 0.99$			$a = 1.1$		
		$\omega = -1$	$\omega = 0$	$\omega = 1$	$\omega = -1$	$\omega = 0$	$\omega = 1$
$J = 0.1$	5.8	5.9			61.7		
	3.73%	4.35%			14.04%		
$J = 11$	25.2	15.2	16.5	34.5	20.0	16.8	14.0
	0.25%	0.27%	0.27%	0.28%	0.36%	0.36%	0.34%

Tabulka 4.1. Numericky vypočtené hodnoty γ faktoru pro případy z obr. 4.4 a 4.5. První číslo značí nalezenou maximální hodnotu urychlení γ_{top} , druhé číslo je procentuálním vyjádřením počtu trajektorií dosahujících alespoň rychlosti $v = 0.9c$ ($\gamma \dot{=} 2.3$, zelená a výše). Tabulka slouží k porovnávání vlivu jednotlivých geometrií, není vhodné přímé srovnání mezi urychlováním struny pro $J = 0.1$ a $J = 11$ - jednotlivé případy odpovídají zcela odlišným hodnotám energie E viz obr. 4.4.

gularity jsou oproti černým díram zvýhodněny, jelikož pro NS nemůže být žádná struna polapena a urychlených trajektorií je více. Trajektorie struny se může pro NS zanořit hlouběji do regionu silného gravitačního pole, jenž bývá u BH skryt pod horizontem. Pro NS je šedá oblast nahrazena barevnými trajektoriemi s vysokým γ faktorem, viz obr. 4.5.

V SdS geometrii jsou všechny trajektorie urychlovány kosmologickou repulzí (barevný posun obrázku), nad statickým poloměrem r_s ve směru y již všechny trajektorie musí utíkat do nekonečna (bílá oblast je uzavřena), viz obr. 4.4(c).

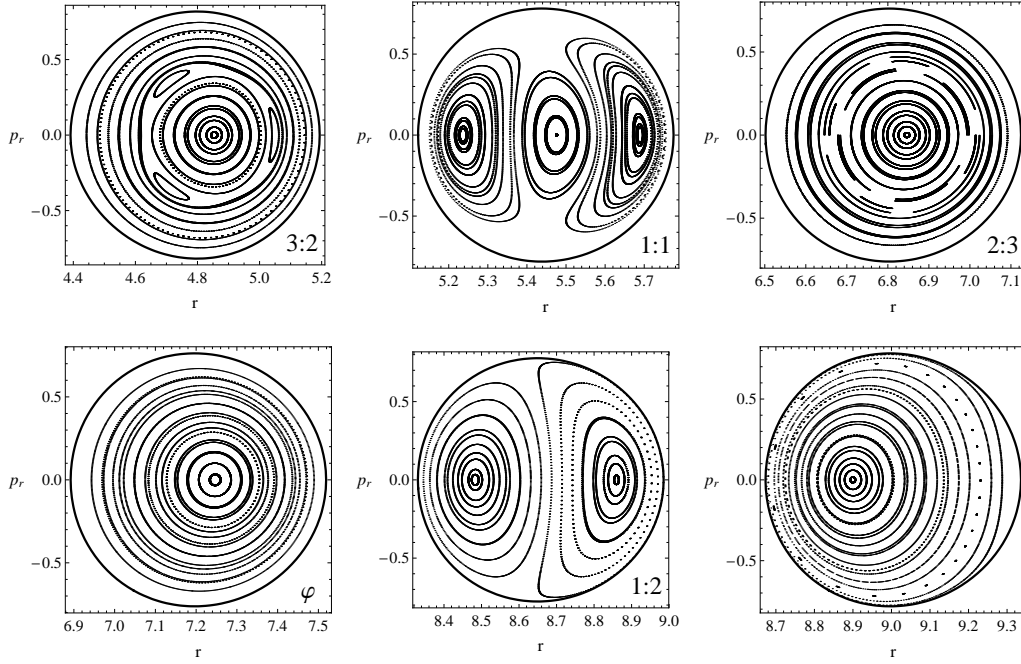
Jak je z obrázků 4.4, 4.5 i z tabulky 4.1 zřejmé, není mechanismus urychlení struny pro různé geometrie diametrálně odlišný - transmutační efekt je projevem axiální konfigurace kruhové struny. Výhodou předvedeného modelu je možnost dosažení ultra relativistického urychlení i v Schwarzschildově metrice - není potřeba rotující černé díry, jako je tomu v případě Blandford—Znajekova efektu [20].

4.2. Chaos a regularita

Pohyb struny v okolí kompaktního objektu je obecně chaotický [7]. Nicméně se i zde, stejně jako v případě chaotického pohybu částic [21, 22], můžou vyskytnout „ostrůvky regularity“. Například pokud se struna bude vyskytovat přesně v minimu energetické hranice $E_b(r, \theta)$, pak je „pohyb“ s nulovými hybnostmi triviálně regulární $r(\zeta) = r_0, \theta(\zeta) = \theta_0$ - struna se nepohybuje. V této části se pokusíme vyjasnit vztah mezi regulární a chaotickou dynamikou právě v okolí tohoto minima.

Eliptické body stability [23] Hamiltoniánu (1.30) odpovídají lokálnímu minimu $X_0^\alpha = (r_0, \theta_0)$ funkce určující hranici pro pohyb $E_b(r, \theta)$. Je výhodné přepsat Hamiltonián do podoby

$$H = H_D + H_P = \frac{1}{2}g^{rr}P_r^2 + \frac{1}{2}g^{\theta\theta}P_\theta^2 + H_P(r, \theta), \quad (4.14)$$



Obrázek 4.6. Poicarého řezy r/p_r ($\theta = \pi/2$) pro skupiny trajektorií v okolí rezonančních i nerezonančních minim funkce E_b . Funkce $E_b(r, \theta)$ hraje roli „efektivního potenciálu“ (viz např. [11]), její tvar je určen parametrem J , spočteným podle příslušného minima. Každá trajektorie ze skupiny se odlišuje různými počátečními podmínkami r, P_r, P_θ , majíce však stejnou energii E (černá silná křivka je energetická hranice) i parametr J , tudíž se pohybuje ve stejném „efektivním potenciálu“ $E_b(r, \theta)$. Vidíme rozpad torů pro rezonance $\omega_\theta : \omega_r = 1 : 1$ a $1 : 2$; pro jiné rezonance a pro nerezonanční poměry zůstávají torý zachovány. Nejzachovalejší torý existují v případě zlatého řezu $1 : \varphi$.

kde jsme rozdělili Hamiltonián (1.30) na „dynamickou“ H_D a „potenciální“ H_P část. Zavedeme-li malý parametr $\epsilon \ll 1$, pak můžeme přeskálovat hybnosti a souřadnice

$$X^\alpha = X_0^\alpha + \epsilon \hat{X}^\alpha, \quad P_\alpha = \epsilon \hat{P}_\alpha, \quad (4.15)$$

pro $\alpha \in \{r, \theta\}$. Nyní rozvineme Hamiltonián do Taylorovy řady a separujeme jednotlivé části podle řádu ϵ

$$H(\hat{P}_\alpha, \hat{X}^\alpha) = H_0 + \epsilon H_1(\hat{X}^\alpha) + \epsilon^2 H_2(\hat{P}_\alpha, \hat{X}^\alpha) + \epsilon^3 H_3(\hat{P}_\alpha, \hat{X}^\alpha) + \dots, \quad (4.16)$$

kde člen H_k je řádu k . Poznamenejme, že hybnosti P_α se vyskytují kvadraticky v (4.14), a objeví se v H_k pouze pro $k \geq 2$. Je-li struna v minimu funkce E_b , máme $H_D = 0$ a tudíž je i první člen rozvoje (4.16) nulový $H_0 = 0$, dále podmínky (1.32-1.33) pro existenci stacionárních bodů $E_b(r, \theta)$ dávají $H_1(\hat{X}^\alpha) = 0$.

Nyní můžeme podělit rovnici (4.16) členem ϵ^2 ($H = 0$) a dostáváme Hamiltonián v okolí lokálního minima ve tvaru „část regulární“ plus „perturbace“

$$H = H_2(\hat{P}_\alpha, \hat{X}^\alpha) + \epsilon H_3(\hat{P}_\alpha, \hat{X}^\alpha) + \dots \quad (4.17)$$

Pokud je parametr $\epsilon = 0$, máme integrabilní Hamiltonián

$$H = H_2(\hat{P}_\alpha, \hat{X}^\alpha) = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left[g^{\alpha\alpha} (\hat{P}_\alpha)^2 + \tilde{\omega}_\alpha^2 (\hat{X}^\alpha)^2 \right] \quad (4.18)$$

reprezentující dva nezávislé harmonické oscilátory. Pro strunu v minimu $E_b(r, \theta)$ se souřadnicemi $r = r_0 + \delta r, \theta = \theta_0 + \delta \theta$ dostáváme periodické oscilace

$$\ddot{\delta r} + \omega_r^2 \delta r = 0, \quad \ddot{\delta \theta} + \omega_\theta^2 \delta \theta = 0, \quad (4.19)$$

s lokálně naměřenými frekvencemi

$$\omega_r^2 = \frac{1}{g_{rr}} \frac{\partial^2 H_P}{\partial r^2}, \quad \omega_\theta^2 = \frac{1}{g_{\theta\theta}} \frac{\partial^2 H_P}{\partial \theta^2}. \quad (4.20)$$

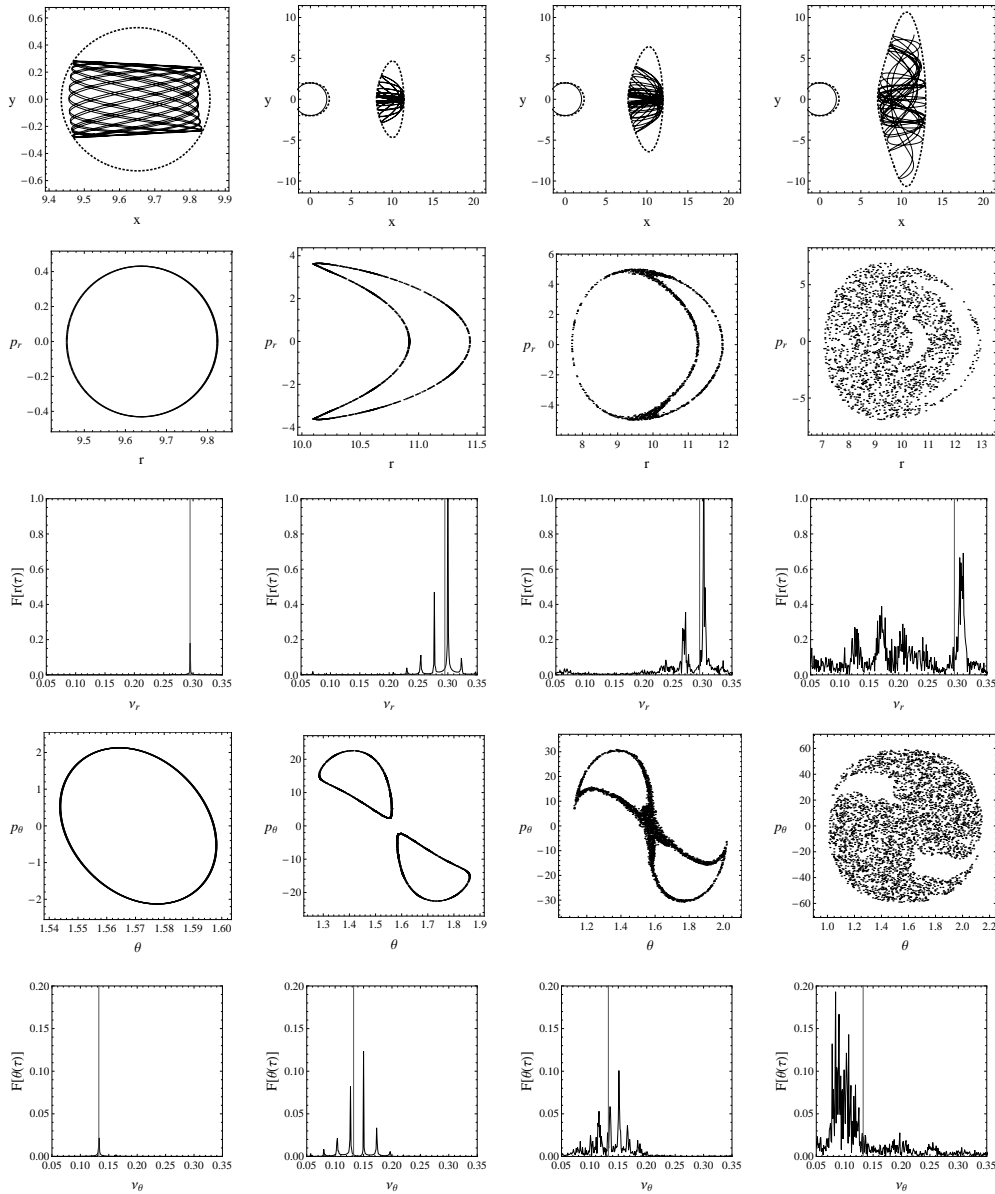
Na souřadnicové transformace (4.16) je kladen požadavek kanoničnosti [23], ten nebude splněn pro rezonanční frekvence $\omega_r : \omega_\theta = 1 : 1, 2 : 1$ a $1 : 2$, viz [23, 24]. Trajektorie 2D harmonického oscilátoru s 4D fázovým prostorem dynamických proměnných r, P_r, θ, P_θ bude ležet na toru $S_1 \times S_1$. Pro malé perturbace zůstává tento torus zachován a v Poicarého řezu vidíme různě deformované kružnice, viz obr. 4.7. Toto neplatí pro případ rezonančních frekvencí $1 : 1, 2 : 1, 1 : 2$, kde se původní tory rozpadají. Nicméně i zde je pohyb pro malé perturbace regulární viz obr. 4.6.

Uvedená procedura (4.17) je ekvivalentní linearizaci pohybových rovnic v okolí minima funkce E_b .

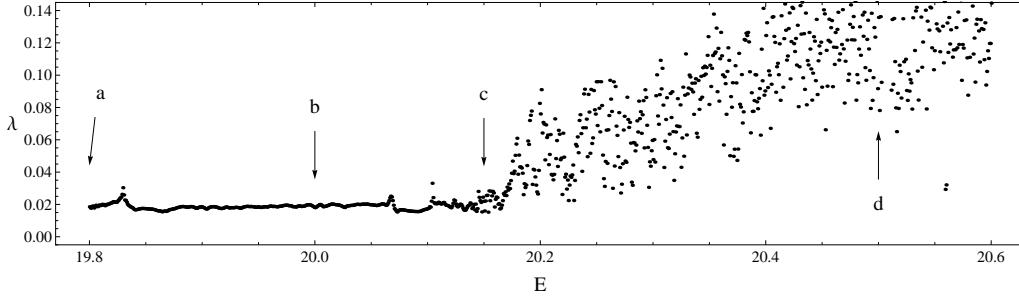
Podle Kolmogorov-Arnold-Moserova teorému (KAM) [23], bude struna kvazi-periodicky oscilovat v okolí bodu (r_0, θ_0) pokud parametr ϵ zůstane malý. Jakmile parametr ϵ vzroste a podmínka $\epsilon \ll 1$ bude porušena, nelineární část Hamiltoniánu se stane výraznou, a struna vkročí do nelineárního režimu. Zvýšení nelinearity systému v okolí minima je zapříčiněno vzrůstem energie, průběh přechodu od zcela regulárního pohybu k chaosu je ukázán na obr. 4.7. K zachycení změn jsme použili Poincarého řezu, Fourierovské spektrum trajektorie struny i samotnou trajektorii struny [25, 26, 27].

Přechod z regulárního do chaotického režimu je jednoduchým vysvětlením efektu „fokusace“ trajektorie struny, uvedeného v [9], kdy se určité trajektorie s malou energií jeví „namačkány“ v okolí ekvatoriální roviny a nesnaží se prozkoumávat celou svou hranici. Efekt je diskutován v příložených člancích [12, 13].

Míru chaotičnosti můžeme vyjádřit pomocí Lyapunovských koeficientů, kde se využívá vysoké citlivosti chaotického systému na počáteční podmínky. Uvažujeme dvě trajektorie, mající v čase t_0 malý rozdíl počátečních podmínek d_0 ve fázovém

(a) $E = 19.8$ (b) $E = 20$ (c) $E = 20.15$ (d) $E = 20.5$

Obrázek 4.7. Přechod z regulárního režimu pohybu do chaotického v poli Schwarzschildovy BH. Kruhová struna s proudem $J = 11$ se pohybuje v okolí minima ($r_0 \doteq 9.64, \theta_0 = \pi/2$), v jednotlivých případech se zvyšující se energií E . Pro každý ze čtyř případů je spočtena trajektorie struny, Poicarého řez r/p_r ($\theta = \pi/2$) a θ/p_θ ($r = r_0$), Fourierovské spektrum oscilací pro souřadnici r a θ . Ve Fourierovských spektrech jsou vyznačeny i frekvence $\nu_r = \omega_r/(2\pi), \nu_\theta = \omega_\theta/(2\pi)$. Pro první případ (a) je pohyb zcela pravidelný a trajektorie struny tvoří Lissajousovy obrazce, na posledním obrázku (d) naopak vidíme pohyb zcela náhodný. Dynamika je regulární až zhruba do energie $E \sim 20.15$, kde začíná chaotický režim pohybu, viz obr. 4.8.



Obrázek 4.8. Vývoj největšího Lyapunovského exponentu λ v závislosti na energii kruhové struny E pro pohyb v okolí minima, viz obr. 4.7. Jak zaručuje KAM teorém, pro malé energie nad energií v minimu $E_{\min} \doteq 19.7$ máme pohyb zcela regulární, pro energie větší již pohyb chaotický. Přechod mezi zmíněnými režimy pohybu je v tomto případě v energii $E \sim 20.15$. Písmenka označují jednotlivé případy trajektorií z obr. 4.7.

prostoru. Tak jak se systém v čase vyvíjí, tyto dvě trajektorie se budou od sebe exponenciálně vzdalovat, pokud je systém v chaotickém režimu. Klasický Lyapunovský exponent [25]

$$\lambda_L = \lim_{\substack{d_0 \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d_0} \right) \right) \quad (4.21)$$

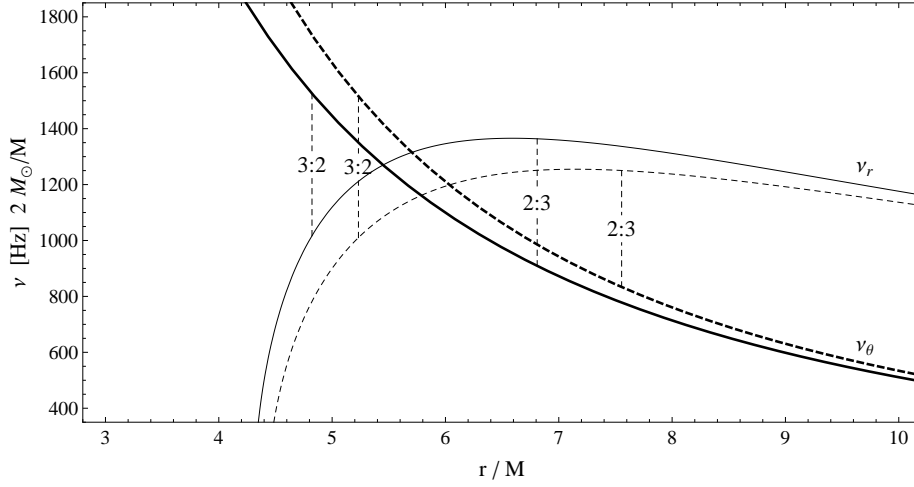
popisuje separaci těchto dvou trajektorií a tedy měří míru chaosu. Lyapunovský exponent můžeme vypočíst pro každý stupeň volnosti systému. Vývoj maximálního Lyapunovského exponentu [25] zřetelně demonstruje na obr. 4.8 přechod struny z regulárního do chaotického režimu v závislosti na rostoucí energii struny. Kritická energie přechodu regulární/chaotický je pro tento případ $E \sim 20$.

Vidíme že kruhová struna může také složit jako model při zkoumání chaosu v obecné relativitě.

4.3. Malé oscilace struny a QPOs

Kvaziperiodický charakter pohybu struny, polapené v „jezířku“ okolo minima funkce $E_b(x, y)$, můžeme použít k další astrofyzikálně zajímavé interpretaci - vysvětlení vysokofrekvenčních kvaziperiodických oscilací (HF QPOs) pozorovaných v rentgenovém oboru mnoha Low Mass X-Ray Binaries systémů (neutronová hvězda/černá díra) [28, 29], nebo černých děr [30, 31].

Některé z HF QPOs se objevují v párech, jako horní a dolní frekvence (ν_U , ν_L), tedy jako dvojitý peak (ostrý vrchol) ve Fourierovském spektru. Jelikož jsou peaky vysokých frekvencí velice blízko frekvenci mezní stabilní orbity pro Keplerovský disk v okolí černé díry (neutronové hvězdy), nabízí se vysvětlení, že HF QPOs jsou efektem velmi silné gravitace [32]. Většinou se k vysvětlení pozorovaných HF QPOs v okolí černých děr a neutronových hvězd používá Keplerovská



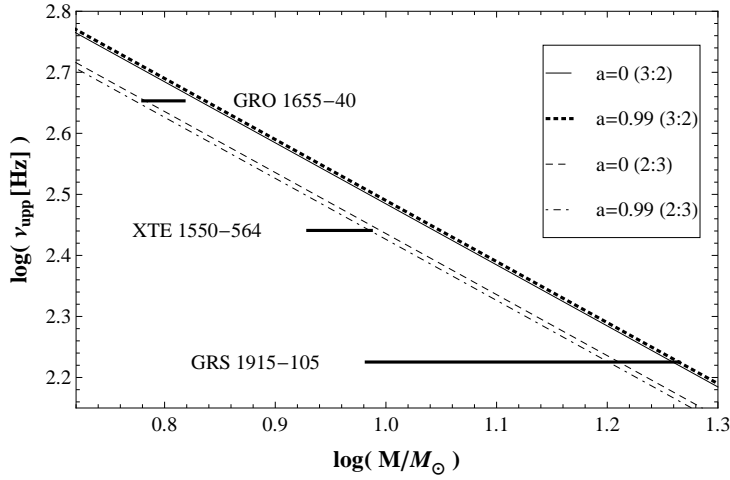
Obrázek 4.9. Frekvence oscilací ν_r, ν_θ kruhové struny v okolí minima funkce $E(r, \theta)$ v ekvatoriální rovině. Frekvence jsou uvedeny ve fyzikálních jednotkách pro objekt s hmotností $M = 2M_\odot$, tak jak je měří pozorovatel v nekonečnu. Průběh frekvencí oscilací struny nezávisí, oproti pohybu částic [32], příliš na rotačním parametru a . Zobrazeny jsou křivky pro $a = 0$ (plně čáry) a $a = 2$ (čárkované čáry). Rezonanční poloměry 3 : 2 a 2 : 3 jsou vyznačeny.

$\nu_K = \nu_\phi$ a epicyklické (radiální ν_r a latitudinální ν_θ) frekvence. Nicméně žádný se současných modelů není schopen popsat všechny HF QPOs v mikrovazarech [33]. Rozdílnost radiální ν_r a latitudinální ν_θ oscilační frekvence v závislosti na souřadnici r vede k různým poměrům frekvencí, a slouží tak k modelování HF QPOs.

Frekvence oscilací kruhové struny ν_r, ν_θ v okolí minima funkce $E_b(r, \theta)$, tak jak je měří ve fyzikálních jednotkách pozorovatel v nekonečnu, jsou pro případ Schwarzschildovy metriky

$$\nu_a = \frac{1}{2\pi} \frac{c^3}{GM} \omega_a, \quad \omega_r^2 = \frac{r^2 - 5r + 3}{r^4}, \quad \omega_\theta^2 = \frac{1}{r^3}, \quad (4.22)$$

kde $a \in \{r, \theta\}$. Je velice zajímavé, že latitudinální oscilační frekvence kruhové struny ν_θ je rovna latitudinální frekvenci epicyklického geodetického pohybu částic v poli Schwarzschildovy černé díry [32]. Radiální frekvence oscilací ν_r se ale v případě částic a kruhové struny liší. Je tedy možné, že oscilace kruhové struny jsou korekcemi k modelům HF QPOs založených na geodetických epicyklických oscilacích pohybujících se částic.



Obrázek 4.10. Fitování naměřených dat pro QPOs viz tab. 4.2., pomocí 3 : 2 a 2 : 3 parametrického rezonančního modelu pro rezonance kruhové struny. Nabízí se srovnání s obr. 6 z [32] pro pohyb částic.

zdroj	GRO 1655-40	XTE 1550-564	GRS 1915+105
M/M_{\odot}	6.03 — 6.57	8.5 — 9.7	9.6 — 18.4
ν_U [Hz]	447 — 453	273 — 279	165 — 171
ν_L [Hz]	295 — 305	179 — 189	108 — 118
a	0.65 — 0.75	0.29 — 0.52	$\sim 0.7 (> 0.98)$

Tabulka 4.2. Pozorovaná data pro různé zdroje QPOs převzatá z [32].

Pro případ Kerrovy rotující černé díry mají radiální a latitudiální frekvence už i pro $\omega = 0$ poměrně komplikovaný průběh

$$\omega_r^2 = \frac{1}{r(a^2 - r^3)(a^2(r+2) + r^3)^2} \left(r^6((5-r)r - 3) + 3a^6r + a^4(r(2r(5r-9) + 9) - 6) - a^2r^3(r((r-10)r + 35) - 27) \right), \quad (4.23)$$

$$\omega_{\theta}^2 = \frac{a^4(2-3r) + 2a^2(3-2r)r^2 - r^5}{r^2(a^2 - r^3)(a^2(r+2) + r^3)}, \quad (4.24)$$

Závislost funkcí $\omega_r^2(r)$, $\omega_{\theta}^2(r)$ na rotačním parametru a je zřejmá z obr. 4.9.

Pozorované hodnoty frekvencí QPOs pro zdroje GRO 1655-40, XTE 1550-564 a GRS 1915+105 zřetelně ukazují na poměr frekvencí

$$\nu_U : \nu_L = 3 : 2 \quad (4.25)$$

pro horní ν_U a dolní ν_L frekvence, viz tab.4.2. Pokusili jsme se aplikovat 3 : 2 parametrický rezonanční model [32] také na naši kruhovou strunu tím, že jsme

identifikovali pozorované frekvence ν_U, ν_D s frekvencemi ν_θ, ν_r (4.23-4.24). Oproti rezonancím pro pohyb testovacích částic, existuje pro strunu nejen poměr 3 : 2 ale i 2 : 3, viz obr. 4.9 - máme 3 : 2 a 2 : 3 parametrický rezonanční model pro kruhovou strunu.

Předběžné výsledky z připravovaného článku jsou pro případ $\omega = 0$ ukázány na obr. 4.10.

Závěr

V této práci bylo předvedeno chování kruhové struny nesoucí skalární pole v poli kompaktního objektu. Zkoumáním dynamiky v různých prostoročasech, můžeme poodhalit některé vlastnosti těchto geometrií. Ukázali jsme také, že model kruhové struny může být použit v řadě astrofyzikálních situací. Shrňme podstatné závěry dosavadní práce:

- Na struně umístěné skalární pole, je klíčové pro vytvoření momentu hybnosti kruhové struny. Skalární pole zajišťuje existenci stabilních pozic pro dynamiku struny.
- Pozice mezního vázaného a mezního stabilního poloměru pro kruhovou strunu napovídá, že dynamika struny v Kerrově BH metrice, není stejná jako pohyb fotonů ani jako pohyb částic po kruhových drahách, ale je mezi oběma uvedenými případy, viz obr. 3.9.
- Repulzivní kosmologická konstanta Λ příliš neovlivní oscilace struny ve směru x , ale způsobí urychlení kruhové struny podél osy y , významně pak nad statickým poloměrem.
- Ultra relativistické urychlení kruhové struny podél osy y není způsobeno novou silou zvedenou do modelu, ale snížením volnosti pohybu - struna je definitoricky axiálně symetrická a kolmá na osu y , a tak může uniknout pouze podél osy y .
- Proces urychlení nezávisí příliš na tvarech různých geometrií; oproti černým díram, jsou nahé singularity zvýhodněny pouze neexistencí struny pohlcujícího horizontu a tudíž větším počtem uniklých trajektorií, jež navštívily oblast silné gravitace. Významného urychlení je dosahováno pro velký poměr energie struny E / strunový parametr J .
- Pohyb kruhové struny v poli kompaktních objektů je oproti pohybu testovací částice chaotický. Struna v okolí stabilního eliptického bodu (minima) vykonává pohyb regulární, pokud je její energie nad eliptickým bodem malá.

Přestože bylo vykonáno dosti práce k pochopení dynamiky kruhové struny, stále ještě existuje mnoho nezodpovězených otázek a zajímavých problémů:

- Je možné, že akce (1.7) použitá pro popis kruhové struny, neodpovídá dokonale reálné fyzikální situaci a objeví se přesnější (komplikovanější) model. Bylo by dobré odvodit za jakých podmínek můžeme model (1.7) použít, určitého pokroku v tomto směru bylo dosaženo v práci [34]

- Vliv elektromagnetického pole na dynamiku struny je klíčový pro pochopení modelu. Pohyb kruhové struny v homogenním magnetickém poli jsme již začali vyšetřovat v článku [14]. Zde se ovšem objevují nové problémy, jako je například elektromagnetická interakce struny sama se sebou i elektromagnetické záření kruhové struny.
- Možnost odhadu energie přechodu systému z regulárního do chaotického režimu, neboli odhad maximální poruchy kterou systém ještě ustojí, může být dalším směrem našeho bádání.
- Vztah pozorovaných QPOs a malých oscilací struny v okolí minima (stabilního eliptického bodu) vzhledem k závislosti na rotačním parametru Kerrovy metriky a nyní intenzivně vyšetřujeme. Zajímavým se jeví i fakt rozpadu torů pro malé poměry rezonancí $1 : 1, 2 : 1, 1 : 2$ a vztah k pozorovaným rezonancím $3 : 2, 2 : 3$.

Těmto a dalším otázkám je možné se věnovat v následujícím výzkumu dynamiky kruhové struny.

Literatura

- [1] V. S. Semenov and L. V. Bernikov, “Magnetic flux tubes - nonlinear strings in relativistic magnetohydrodynamics,” *Astro. and Space Sci.* **184**, 157-166 (1990).
- [2] V. Semenov, S. Dyadechkin and B. Punsly, “Simulations of jets driven by black hole rotation,” *Science* **305**, 978 (2004) [arXiv:astro-ph/0408371].
- [3] E. Witten, “Superconducting Strings,” *Nucl. Phys. B* **249**, 557 (1985).
- [4] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*, (Cambridge University Press, Cambridge 1994).
- [5] A. L. Larsen, “Cosmic string winding around a black hole,” *Phys. Lett. B* **273**, 375-379 (1994).
- [6] A. L. Larsen, “Dynamics of cosmic strings and springs; a covariant formulation,” *Class. Quant. Grav.* **10**, 1541 (1993) [arXiv:hep-th/9304086].
- [7] A. L. Larsen, “Chaotic string capture by black hole,” *Class. Quant. Grav.* **11**, 1201 (1994) [arXiv:hep-th/9309086].
- [8] A. V. Frolov and A. L. Larsen, “Chaotic scattering and capture of strings by a black hole,” *Class. Quant. Grav.* **16**, 3717 (1999) [arXiv:gr-qc/9908039].
- [9] T. Jacobson and T. P. Sotiriou, “String dynamics and ejection along the axis of a spinning black hole,” *Phys. Rev. D* **79**, 065029, (2009) [arXiv:gr-qc/0812.3996].
- [10] M. Kološ and Z. Stuchlík, “Current-carrying string loops in black-hole spacetimes with a repulsive cosmological constant,” *Phys. Rev. D* **82**, 125012 (2010) [arXiv:gr-qc/1103.40056].
- [11] Z. Stuchlík and M. Kološ, “Acceleration of string loops in the Schwarzschild-de Sitter geometry,” *Phys. Rev. D* **85**, 065022 (2012) [arXiv:gr-qc/1206.5658].
- [12] Z. Stuchlík and M. Kološ, “String loops in the field of braneworld spherically symmetric black holes and naked singularities” *JCAP*, **10** 8 (2012)
- [13] M. Kološ and Z. Stuchlík, “Dynamics of current-carrying string loops in the Kerr naked-singularity and black-hole spacetimes,” in preparation

-
- [14] A. Tursunov, M. Kološ, B. Ahmedov and Z. Stuchlík, “Dynamics of an electric current carrying string loop near a Schwarzschild black hole embedded in an external magnetic field,” accepted in *Phys. Rev. D* (2013).
- [15] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, (W. H. Freeman and Co, New York, 1973).
- [16] J. M. Bardeen, W. H. Press and S. A. Teukolsky, “Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation,” *Astro. Journal*, **178**, 347-370 (1972)
- [17] Z. Stuchlík, P. Slaný and J. Kovář, “Pseudo-Newtonian and general relativistic barotropic tori in Schwarzschild–de Sitter spacetimes,” *Class. Quant. Grav.* **26**, 215013 (2009) [arXiv:gr-qc/0910.3184].
- [18] Z. Stuchlík and S. Hledík, “Some properties of the Schwarzschild–de Sitter and Schwarzschild–anti-de Sitter spacetimes,” *Phys. Rev. D* **60**, 044006 (1999).
- [19] B. Punsky, *Black hole gravitohydrodynamics*, (Springer, New York 2001).
- [20] R. D. Blandford and R. L. Znajek, “Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes,” *Mon. Noti. of the Royal Astro. Society* **179**, 433-456 (1977).
- [21] O. Kopáček, V. Karas, J. Kovář and Z. Stuchlík, “Transition from Regular to Chaotic Circulation in Magnetized Coronae near Compact Objects,” *Astro. J.* **722**, 1240-1259 (2010) [arXiv:astro-ph.HE/1008.4650].
- [22] O. Semerák and P. Suková, “Free motion around black holes with discs or rings: between integrability and chaos - I,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **404**, 545-574 (2010).
- [23] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, (Springer, New York, 1978).
- [24] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, (John Wiley & Sons, New York, 1989).
- [25] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [26] G. Contopoulos, *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*, (Springer Verlag, Heidelberg, 2002).
- [27] O. Regev, *Chaos and complexity in astrophysics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [28] T. Belloni, M. Méndez and J. Homan, “The distribution of kHz QPO frequencies in bright low mass X-ray binaries,” *Astronom. Astrophys.* **437**, 209-216 (2005), [arXiv:astro-ph/0501186].
- [29] T. Belloni, M. Méndez and J. Homan, “On the kHz QPO frequency correlations in bright neutron star X-ray binaries,” *Monthly Notices of the Royal*

-
- Astronomical Society **376**, 1133-1138 (2007),
- [30] R. A. Remillard, “X-ray spectral states and high-frequency QPOs in black hole binaries,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **326**, 804-807 (2005), [astro-ph/0510699].
- [31] R. A. Remillard and J. E. McClintock, “Active X-ray States of Black Hole Binaries: Current Overview,” *Bulletin of the American Astronomical Society* **38**, 903 (2006), [astro-ph/0510699].
- [32] G. Török, M. A. Abramowicz, W. Kluźniak and Z. Stuchlík, “The orbital resonance model for twin peak kHz quasi periodic oscillations in microquasars,” *Astronom. Astrophys.* **436**, 1-8 (2005).
- [33] G. Török, A. Kotrlová, E. Šrámková and Z. Stuchlík, “Confronting the models of 3:2 quasiperiodic oscillations with the rapid spin of the microquasar GRS 1915+105,” *Astronom. Astrophys.* **531**, A59 (2011), [astro-ph.HE/1103.2438].
- [34] C. Cremaschini and Z. Stuchlík, “Magnetic loops generation by collisionless gravitationally-bound plasmas in axisymmetric tori” *Phys. Rev. E* **87**, 043113 (2013).