Stabilita sluneční soustavy

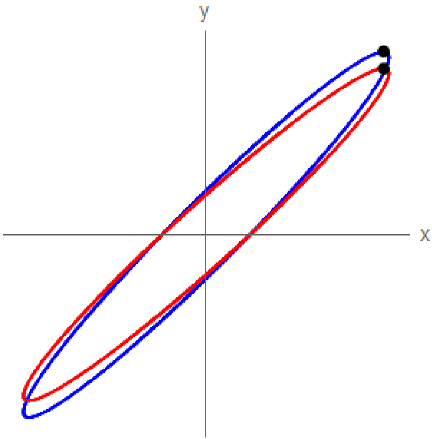
co nám může říct teorie chaosu
o minulosti a budoucnosti našeho útulného domova

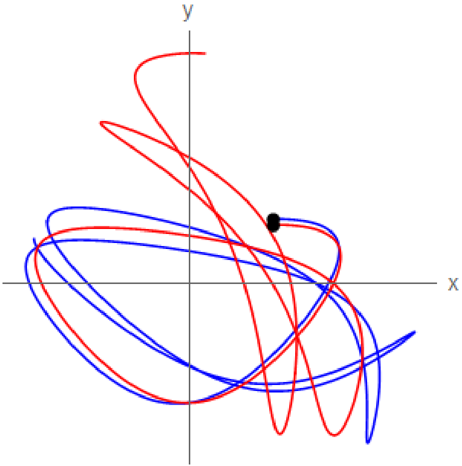
Martin Kološ, *Ústav fyziky SU v Opavě*

9. 3. 2017 / Opava

pravidelná (regulární) × divoká (chaotická) dráha

Co je to deterministický chaos? - Platí zákon (i jednoduchý) ale chování je složité.





Rozdíl mezi pravidelnou a chaotickou dráhou je v tom, jak se chovají kamarádi. Dráhy mající téměř stejné počáteční podmínky se vyvíjejí podobně (regulární), nebo se od sebe rychle vzdalují (chaotická).

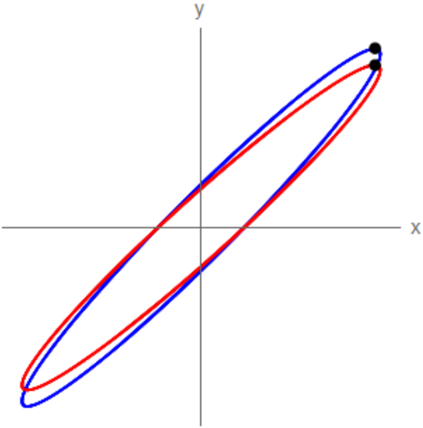
pravidelná (regulární) × divoká (chaotická) dráha

Co je to deterministický chaos? - Platí zákon (i jednoduchý) ale chování je složité.

Soustava lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= p_x, \\ p_x' &= -x, \\ y' &= p_y, \\ p_y' &= -y. \end{aligned}$$

$x = x(t), p_x = p_x(t), y = y(t), p_y = p_y(t)$



Rozdíl mezi pravidelnou a chaotickou dráhou je v tom, jak se chovají kamarádi. Dráhy mající téměř stejné počáteční podmínky se vyvíjejí podobně (regulární), nebo se od sebe rychle vzdalují (chaotická).

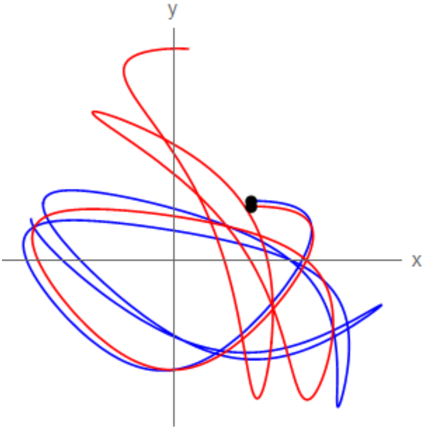
pravidelná (regulární) × divoká (chaotická) dráha

Co je to deterministický chaos? - Platí zákon (i jednoduchý) ale chování je složité.

Soustava nelineárních diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= p_x, \\
p_x' &= -x - 2xy, \\
y' &= p_y, \\
p_y' &= -y - x^2 + y^2.
\end{aligned}
$$

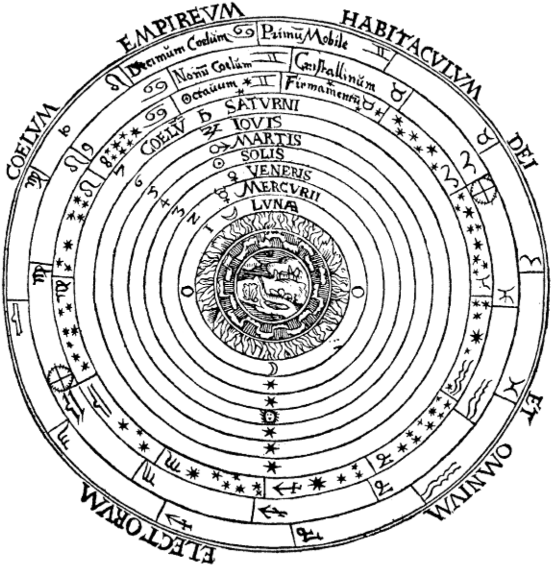
$x = x(t), p_x = p_x(t),\ y = y(t), p_y = p_y(t)$



Rozdíl mezi pravidelnou a chaotickou dráhou je v tom, jak se chovají kamarádi. Dráhy mající téměř stejné počáteční podmínky se vyvíjejí podobně (regulární), nebo se od sebe rychle vzdalují (chaotická).

Vesmír (kosmos - dokonalá harmonie)

Schema huius præmissæ diuisionis Sphærarum.

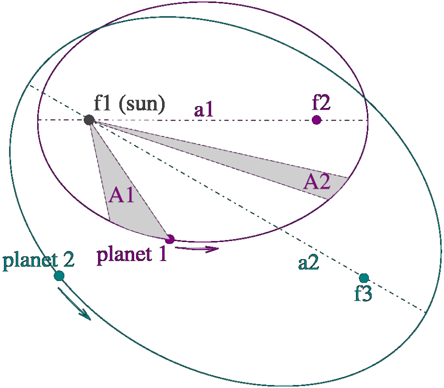


Vesmír jako hodiny - Pražský orloj (1410)

Keplerovy zákony - Johannes Kepler (1618)

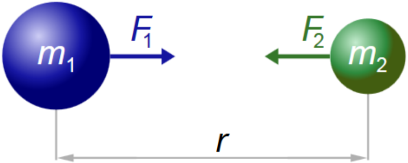
1. Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.
2. Obsahy ploch opsaných průvodičem planety (spojnice planety a Slunce) za stejný čas jsou stejně velké.
3. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin jejich hlavních poloos.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



Newtonovy zákony - Isaac Newton (1687)

Na základě znalosti Keplerových zákonů formuloval Newtonovu gravitační teorii.



Newtonův gravitační zákon

Každá dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 na sebe působí gravitační silou přímo úměrnou hmotnostem těles a nepřímo úměrnou čtverci jejich vzdálenosti

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_1 = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\vec{F}_2 \qquad (1)$$

Newtonovy pohybové zákony

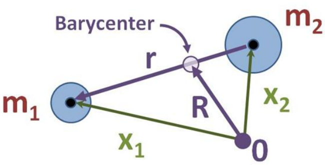
- Zákon setrvačnosti
- Zákon síly

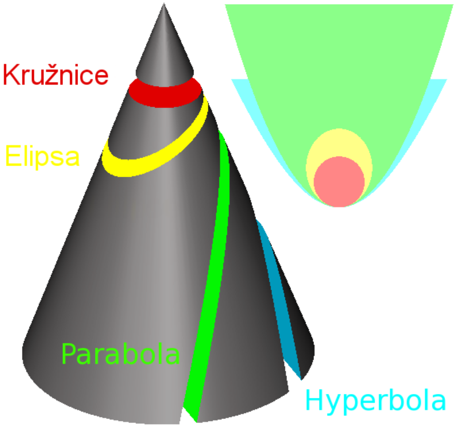
$$\vec{F} = m \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\ddot{\vec{r}} \qquad (2)$$

- Zákon akce a reakce

Problém dvou těles - Johann Bernoulli (1710)

Jaké budou dráhy dvou na sebe vzájemně působících těles v Newtonově gravitační teorii?





Pohybové rovnice (1)+(2):

$$m_1 \ddot{\vec{x_1}} = \vec{F}_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

$$m_2 \ddot{\vec{x_2}} = \vec{F}_{21} = +\frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

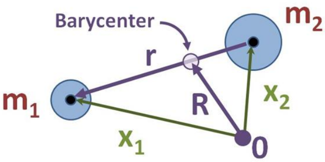
kde $\vec{r} = \vec{x_1} - \vec{x_2}$.

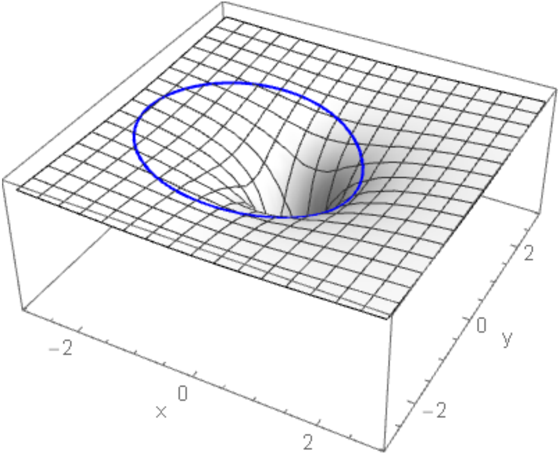
Řešením jsou kuželosečky $r(\varphi) = \frac{p}{1+e\cos(\varphi)}$: parabola, hyperbola, **elipsa**.

Pro $m_1 >> m_2$ možno představit jako pohyb v potenciálu $V(x,y) \sim -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Problém dvou těles - Johann Bernoulli (1710)

Jaké budou dráhy dvou na sebe vzájemně působících těles v Newtonově gravitační teorii?





Pohybové rovnice (1)+(2):

$$m_1\ddot{\vec{x_1}} = \vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

$$m_2\ddot{\vec{x_2}} = \vec{F}_{21} = +\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

kde $\vec{r} = \vec{x_1} - \vec{x_2}$.

Řešením jsou kuželosečky $r(\varphi) = \frac{p}{1+e\cos(\varphi)}$: parabola, hyperbola, **elipsa**.

Pro $m_1 >> m_2$ možno představit jako pohyb v potenciálu $V(x,y) \sim -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Problém tří těles

Jaké budou dráhy tří na sebe vzájemně působících těles v Newtonově gravitační teorii?

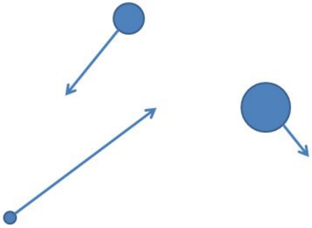
The Real Reason Newton Couldn't Solve the Three Body Problem

Řešení problému tří těles - Henri Poincaré (1887)

Jaké budou dráhy tří na sebe vzájemně působících těles v Newtonově gravitační teorii?

- studium pohybu systému Měsíc-Země-Slunce
- pohybové rovnice (1)+(2):

$$m_1\ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$
$$m_2\ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$$
$$m_3\ddot{\vec{x}}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$



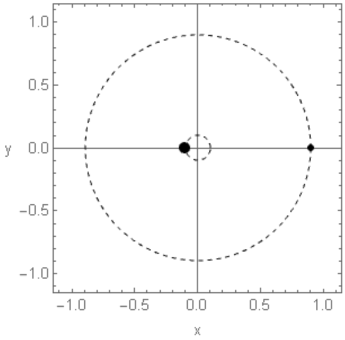
- pokus mnoha významných matematiků dané doby o řešení - nikomu se problém nepodařilo zcela vyřešit (vedlejším produktem je rozvoj matematiky)
- 60. narozeniny švédského krále Oskar II. vypsána zvláštní cena na vyřešení:

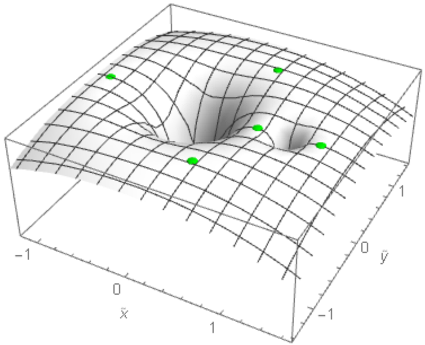
Henri Poincaré: Vyjma několik speciálních případů neexistuje analytické řešení (známé funkce, integrály) pro problém tří těles.

- pro problém tří těles existuje řešení pomocí nekonečné řady, která ale velice pomalu konverguje - **numerické řešení problému tří těles je nejlepší!**

Problém tří těles, rotující soustava a efektivní potenciál

kruhový omezený problém tří těles ($m_1, m_2 >> m_3$) Země-Měsic-raketa; Slunce-Jupiter-kometa

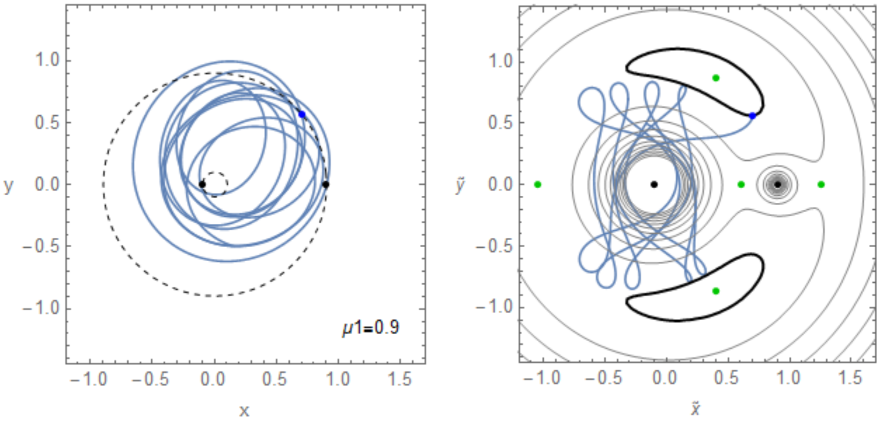




- černé body a čárkované kružnice označují pozici hmotných těles č. 1 a 2
- kartézské souřadnice x, y vs. souřadnice pevně spojené s telesy 1 a 2 $\tilde{x}, \tilde{y}$
- zelené body - Lagrangeovy body
- `video.nb`

ZOO orbit pro problém tří těles

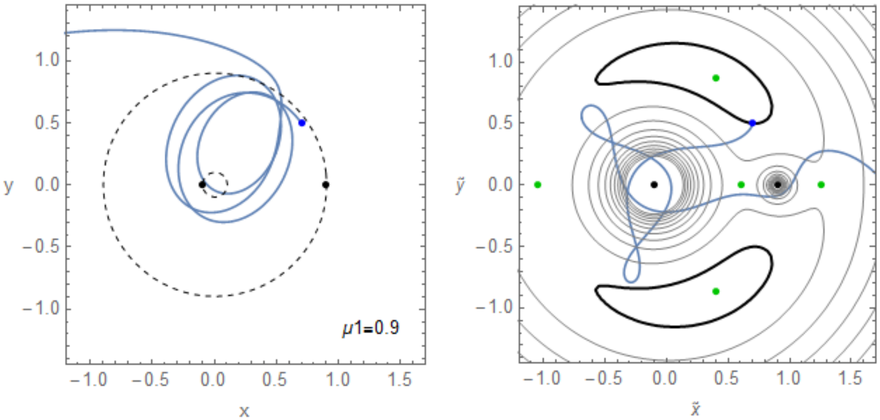
kruhový omezený problém tří těles $(m_1, m_2 >> m_3)$; Slunce-Jupiter-kometa $\mu_1 = 0.999$



- černé body a čárkované kružnice označují pozici hmotných těles č. 1 a 2
- zelené body - Lagrangeovy body
- modrá je trajektorie testovacího těles č. 3

ZOO orbit pro problém tří těles

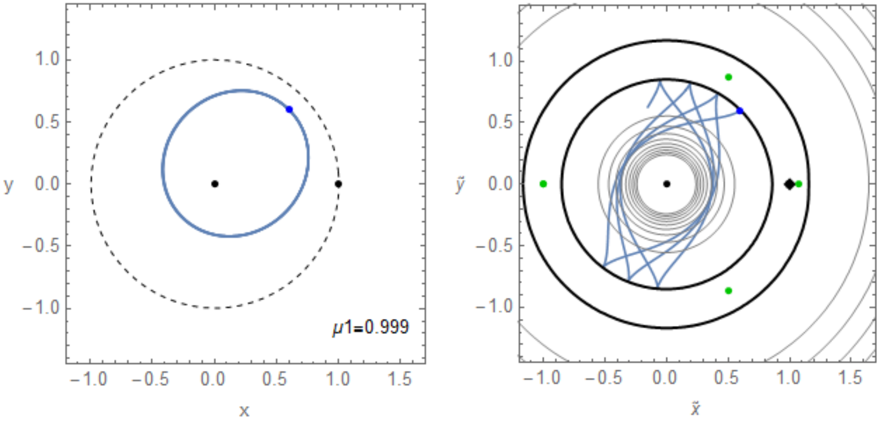
kruhový omezený problém tří těles $(m_1, m_2 >> m_3)$; Slunce-Jupiter-kometa $\mu_1 = 0.999$



- černé body a čárkované kružnice označují pozici hmotných těles č. 1 a 2
- zelené body - Lagrangeovy body
- modrá je trajektorie testovacího těles č. 3

ZOO orbit pro problém tří těles

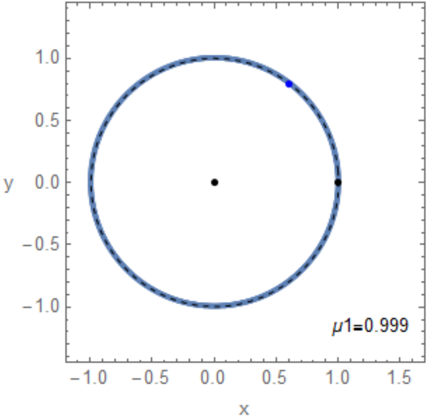
kruhový omezený problém tří těles $(m_1, m_2 >> m_3)$; Slunce-Jupiter-kometa $\mu_1 = 0.999$

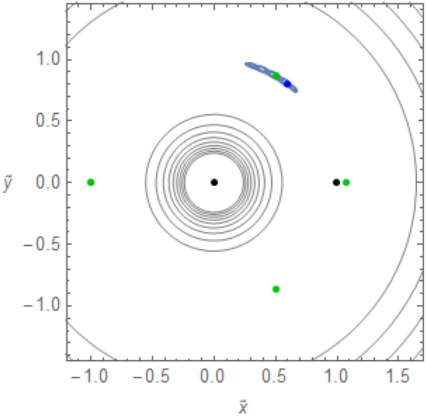


- černé body a čárkované kružnice označují pozici hmotných těles č. 1 a 2
- zelené body - Lagrangeovy body
- modrá je trajektorie testovacího těles č. 3

ZOO orbit pro problém tří těles

kruhový omezený problém tří těles ($m_1, m_2 >> m_3$); Slunce-Jupiter-kometa $\mu_1 = 0.999$

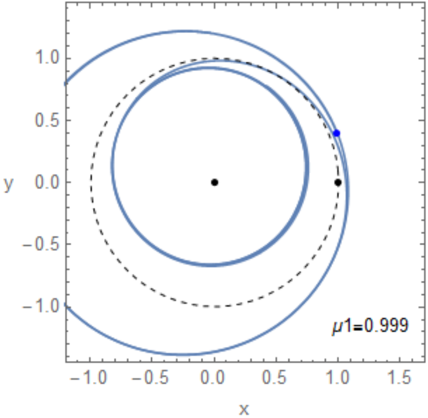


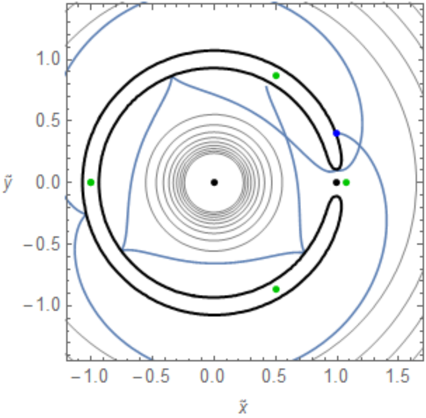


- černé body a čárkované kružnice označují pozici hmotných těles č. 1 a 2
- zelené body - Lagrangeovy body
- modrá je trajektorie testovacího těles č. 3

ZOO orbit pro problém tří těles

kruhový omezený problém tří těles ($m_1, m_2 >> m_3$); Slunce-Jupiter-kometa $\mu_1 = 0.999$

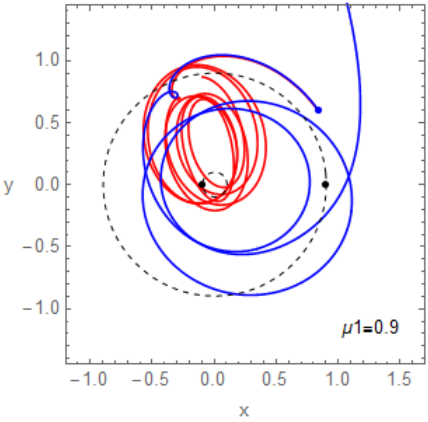


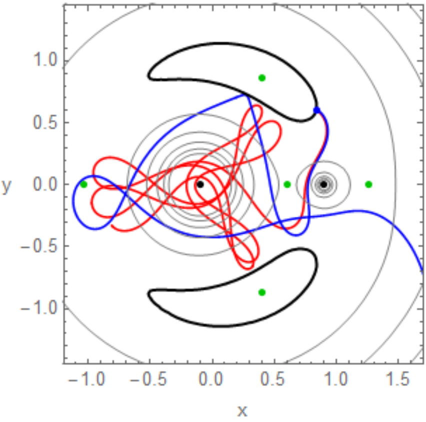


- černé body a čárkované kružnice označují pozici hmotných těles č. 1 a 2
- zelené body - Lagrangeovy body
- modrá je trajektorie testovacího těles č. 3

Problém tří těles a vývoj blízkých trajektorií

kruhový omezený problém tří těles $(m_1, m_2 >> m_3)$





- dvě trajektorie (modrá a červená) startující z modrého bodu
- modrá a červená se jen lehce liší v počátečních podmínkách
- po určité době mají obě zcela odlišný osud

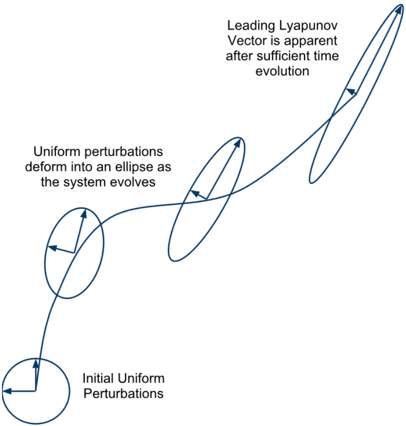
Ljapunovův exponent λ a Ljapunovův čas $1/\lambda$

Ljapunovovy exponenty udávají míru rozbíhání dvou infinitezimálně blízkých d_0 trajektorií ve fázovém prostoru (pro každou souřadnici a rychlost jeden exponent).

$$\boxed{d(t) = \mathbf{e}^{\lambda t} d_0}$$

$$\lambda = \lim_{\substack{d_0 \to 0 \\ t \to \infty}} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d_0} \right) \right)$$

Pokud je maximální Ljapunovův exponent větší než nula, pak je systém chaotický - je velice citlivý na počáteční podmínky.



Ljapunovův čas

Doba za kterou se projeví chaotické vlastnosti systému - vzdálenost dvou blízkých trajektorií (kamarádů) se zvetší násobkem $\boxed{\mathbf{e}}$ - omezuje možnost předpovědi dráhy. Ljapunovův čas je roven převrácené hodnotě z největšího Ljapunovova exponentu.

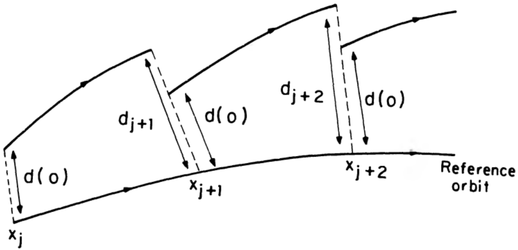
Ljapunovův exponent λ a Ljapunovův čas $1/\lambda$

Ljapunovovy exponenty udávají míru rozbíhání dvou infinitezimálně blízkých d_0 trajektorií ve fázovém prostoru (pro každou souřadnici a rychlost jeden exponent).

$$\boxed{d(t) = \mathbf{e}^{\lambda t} d_0}$$

$$\lambda = \lim_{\substack{d_0 \to 0 \\ t \to \infty}} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d_0} \right) \right)$$

Pokud je maximální Ljapunovův exponent větší než nula, pak je systém chaotický - je velice citlivý na počáteční podmínky.



Ljapunovův čas

Doba za kterou se projeví chaotické vlastnosti systému - vzdálenost dvou blízkých trajektorií (kamarádů) se zvetší násobkem $\boxed{\mathbf{e}}$ - omezuje možnost předpovědi dráhy. Ljapunovův čas je roven převrácené hodnotě z největšího Ljapunovova exponentu.

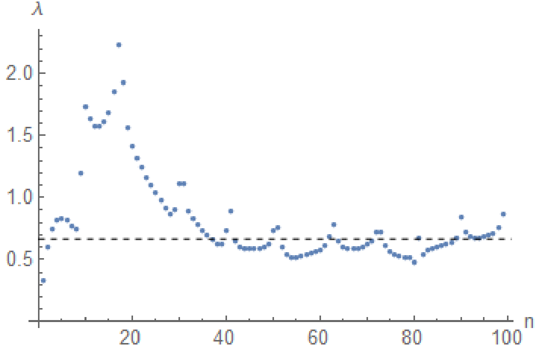
Ljapunovův exponent λ a Ljapunovův čas $1/\lambda$

Ljapunovovy exponenty udávají míru rozbíhání dvou infinitezimálně blízkých d_0 trajektorií ve fázovém prostoru (pro každou souřadnici a rychlost jeden exponent).

$$\boxed{d(t) = \mathbf{e}^{\lambda t} d_0}$$

$$\lambda = \lim_{\substack{d_0 \to 0 \\ t \to \infty}} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d_0} \right) \right)$$

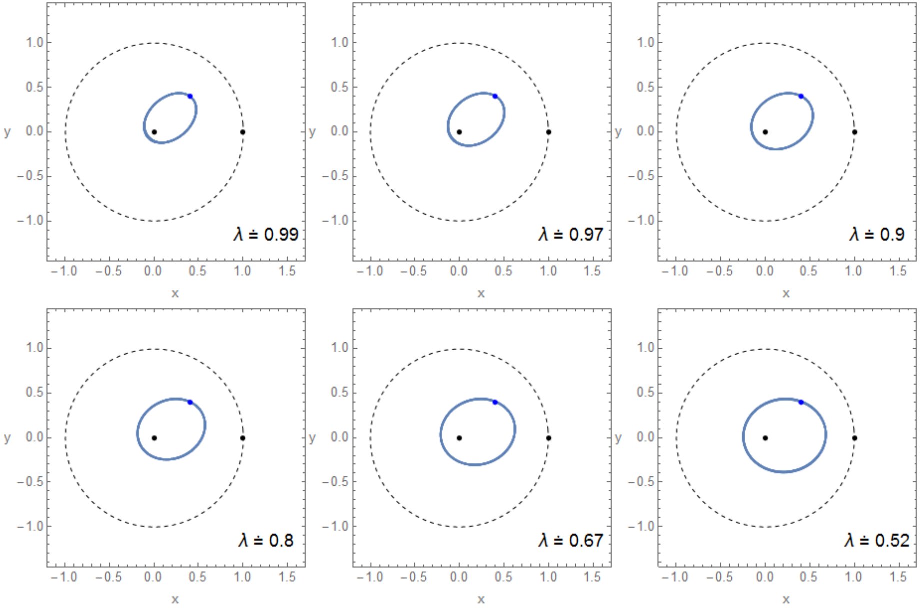
Pokud je maximální Ljapunovův exponent větší než nula, pak je systém chaotický - je velice citlivý na počáteční podmínky.



Ljapunovův čas

Doba za kterou se projeví chaotické vlastnosti systému - vzdálenost dvou blízkých trajektorií (kamarádů) se zvetší násobkem $\boxed{\mathbf{e}}$ - omezuje možnost předpovědi dráhy. Ljapunovův čas je roven převrácené hodnotě z největšího Ljapunovova exponentu.

Ljapunovův exponent λ



Sluneční soustava jako problém N-těles

- Slunce + planety + Pluto = 10 ks ($N = 10$)
- pohybové rovnice (pozice Slunce $\vec{x}_0$, síla jakou na Slunce působí Merkur $\vec{F}_{01}$)

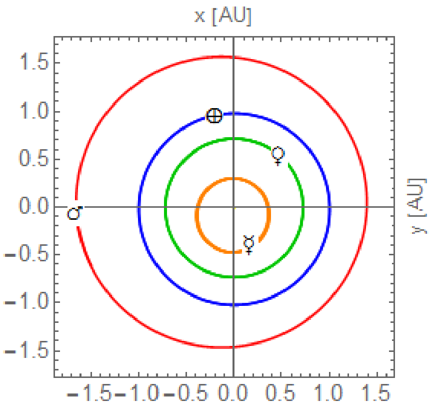
$$
\begin{aligned}
m_0 \ddot{\vec{x}}_0 &= \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \ldots + \vec{F}_{09} \\
m_1 \ddot{\vec{x}}_1 &= \vec{F}_{10} + \vec{F}_{12} + \ldots + \vec{F}_{19} \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

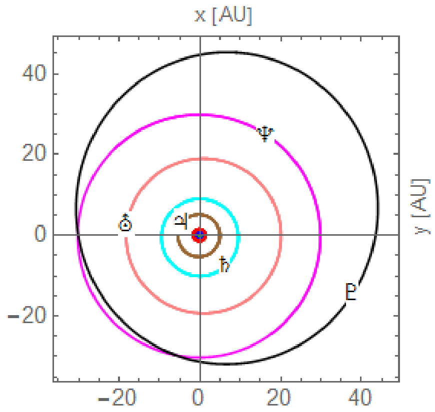
  10 diferenciálních rovnic 2. řádu pro vektor $\vec{x} = \{x, y, z\}$ - tři složky
- Hamiltonovský formalismus - 60 diferenciálních rovnic 1. řádu
- počáteční podmínky (efemeridy):
  `http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi`
- rozměry a jednotky:
  siderický rok: 1 rok = 365 d 6 h 9 min 9 s
  astronomická jednotka: 1 AU = 149 597 870 700 m $\sim$ 150 milionů km
- software *Mathematica*®, čas 100 let trvá na běžném Pc zhruba 2 s

```
];
sol = NDSolve[eqns, vars, {t, tstart, tint}, Method → Metoda, StartingStepSize → startstep, InterpolationOrder → All, MaxSteps → 10^7];
draha = sol[[1]];
tB[];
(*========================= RESI SE NUMERICKY DIF. ROVNICE =========================================*)
```

Sluneční soustava - základní vlastnosti

Slunce, ☿ Merkur, ♀ Venuše, ♁ Země, ♂ Mars, ♃ Jupiter, ♄ Saturn, ⛢ Uran, ♆ Neptun, ♇ Pluto

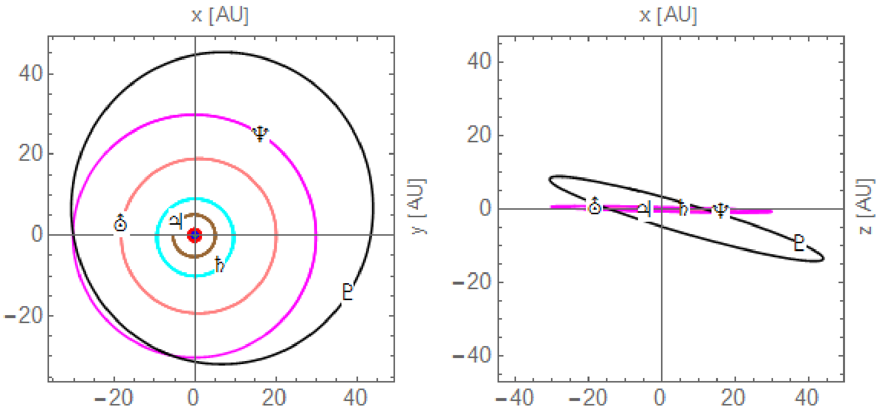




- kolem Slunce (má $\sim 99,9\%$ z celkové hmotnosti) se jednotlivé planety pohybují po téměř kruhových drahách v rovině ekliptiky
- vnitřní planety (0.4-1.5 AU), hlavní pás planetek (2-4 AU), vnější planety (5-30 AU), Kuiperův pás (30-50 AU), Oortův oblak (do 50 000 AU)

Sluneční soustava - základní vlastnosti

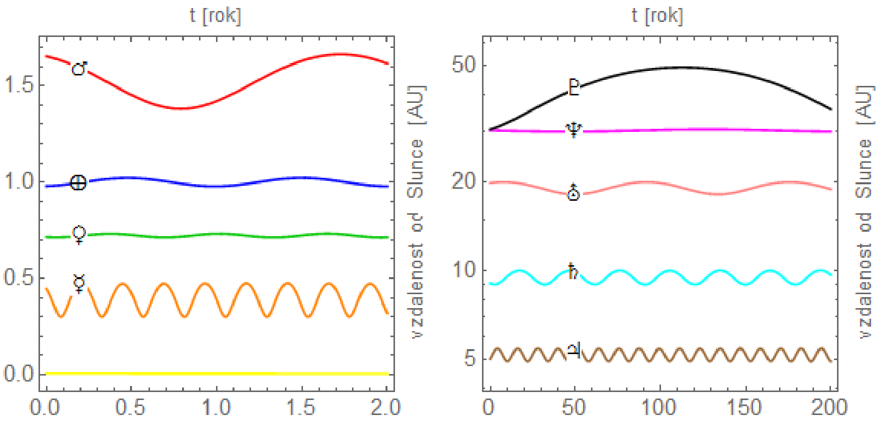
Slunce, ☿ Merkur, ♀ Venuše, ♁ Země, ♂ Mars, ♃ Jupiter, ♄ Saturn, ⛢ Uran, ♆ Neptun, ♇ Pluto



- kolem Slunce (má $\sim 99,9\%$ z celkové hmotnosti) se jednotlivé planety pohybují po téměř kruhových drahách v rovině ekliptiky
- vnitřní planety (0.4-1.5 AU), hlavní pás planetek (2-4 AU), vnější planety (5-30 AU), Kuiperův pás (30-50 AU), Oortův oblak (do 50 000 AU)

Sluneční soustava - základní vlastnosti

Slunce, ☿ Merkur, ♀ Venuše, ♁ Země, ♂ Mars, ♃ Jupiter, ♄ Saturn, ⛢ Uran, ♆ Neptun, ♇ Pluto



- kolem Slunce (má $\sim 99,9\%$ z celkové hmotnosti) se jednotlivé planety pohybují po téměř kruhových drahách v rovině ekliptiky
- vnitřní planety (0.4-1.5 AU), hlavní pás planetek (2-4 AU), vnější planety (5-30 AU), Kuiperův pás (30-50 AU), Oortův oblak (do 50 000 AU)

Chaos ve sluneční soustavě

1 Myr = 1 milión let = 1 000 000 let / 1 Gyr = 1 miliarda let = 10^9 let = 1000 Myr

- pohyb těles ve sluneční soustavě je sice popsán soustavou nelineárních diferenciálních rovnic
- nelinearita je ale slabá - není jednoduché projevy graficky zobrazit
- vliv ostatních planet - posuv perihelia planety Merkur ~ 500 vteřin za 100 let
- chaotičnost planetárních drah se projeví až po velmi dlouhé době $\sim$ Myr
- numerický kód běží jakžtakž přesně (numerickou chybu možno kontrolovat pomocí celkové energie a momentu hybnosti)

Ljapunovův čas

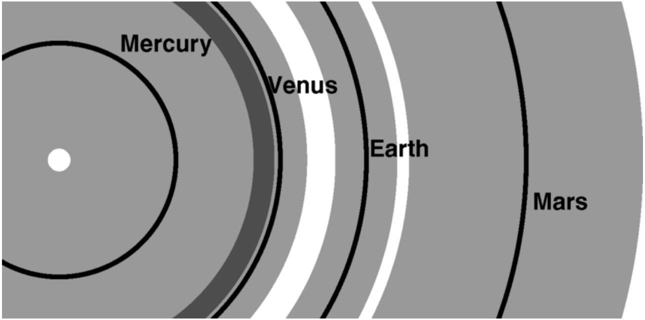
Doba za kterou se projeví chaotické vlastnosti systému - vzdálenost dvou blízkých trajektorií (kamarádů) se zvetší násobkem e - omezuje možnost předpovědi dráhy.

- chyba v určení počátečních podmínek, Ljapunovův čas pro Zemi je 5 Myr:
  - za 10 Myr je chyba $\mathrm{e}^2 \doteq 7\times$;   40 m $\rightarrow$ 300 m
  - za 100 Myr je chyba $\mathrm{e}^{20} \doteq 5 \cdot 10^8\times$;   300 m $\rightarrow$ 1 AU
- dvě trajektorie Země s počátečními pozicemi lišícími se o 40 m dávají za 110 Myr úplně jiné výsledné pozice naší planety

Byla/Bude sluneční soustava taková jaká je dnes?

1 Myr = 1 milión let = 1 000 000 let / 1 Gyr = 1 miliarda let = 10^9 let = 1000 Myr

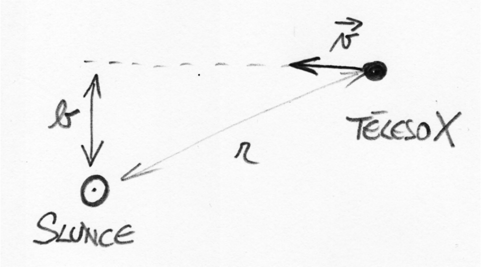
- gravitační smršťování molekulárního mračna - vznik protoplanetárního disku a Slunce (- 4 500 Myr = -4.5 Gyr)
- Slunce se stane rudým obrem (+ 5 400 Myr = + 5.4 Gyr)
- J. Laskar, M. Gastineau: *Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth*, Nature, 459, 817-819 (2009)

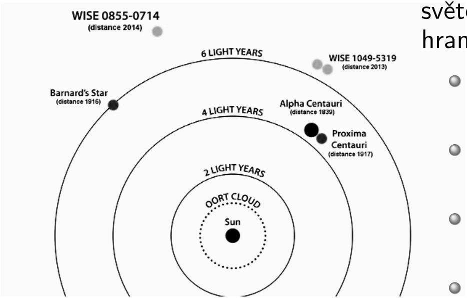


201 trajektorí pro dobu 5 Gyr: nárust excentricity Merkuru; pro 34 trajektorií se Merkur srazí se Sluncem; pro 86 trajektorií se Merkur srazí s Venuší; ...

Jak ukázat nelinearitu sluneční soustavy?

Zapůsobíme na sluneční soustavu nějakou poruchou - necháme projít v okolí sluneční soustavy další těleso (cizí hvězda) a budeme sledovat co se stane.
velikost poruchy $\sim M/(vb^2)$



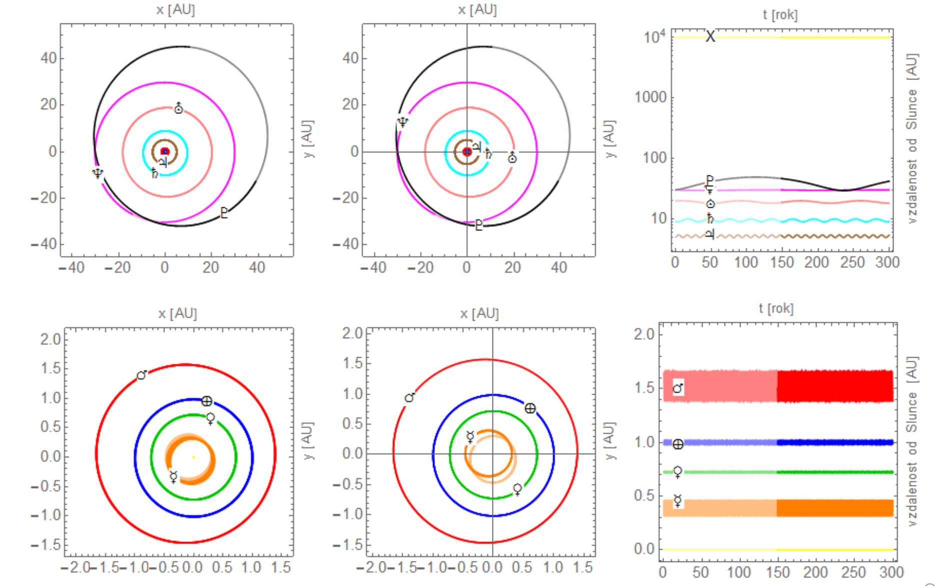


světelný rok 1 ly $\doteq$ 63 000 AU
hranice sluneční soustavy ~50 000 AU

- Proxima Centauri (nyní) $(b = 4.2\text{ly} \doteq 260\,000\text{AU}, M = 0.15 M_\odot)$
- Gliese 710 (projede za 1.3 My) $(b = 0.15\text{ly} \doteq 10\,000\text{AU}, M = 0.5 M_\odot)$,
- Gamma Microscopii (prošla před 3.8 My) $(b = 1.1\text{ly} \doteq 70\,000\text{AU}, M = 2.5 M_\odot)$
- bájná „hvězda smrti“ Nemesis (?)

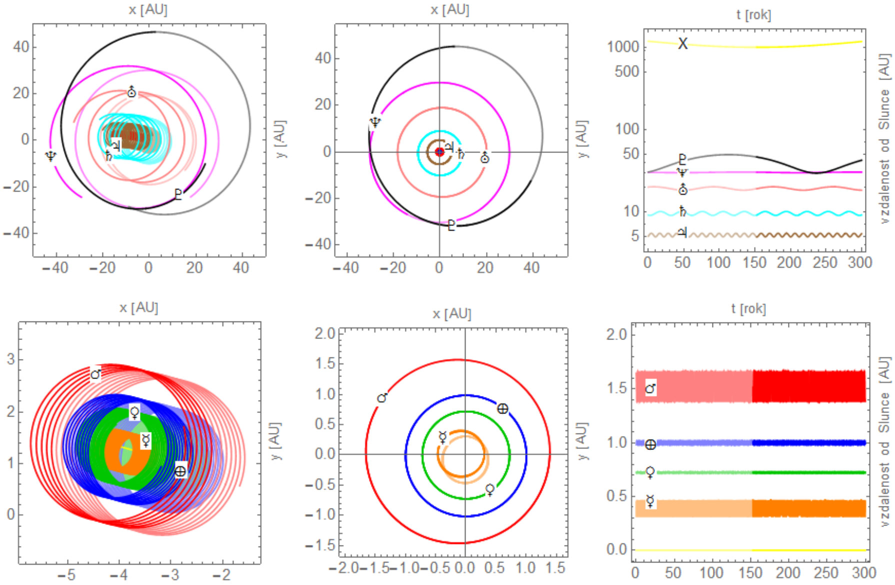
návštěva cizího tělesa: $M = 1M_{\odot}$, $b = 10\,000\mathrm{AU}$

těleso X, ☿ Merkur, ♀ Venuše, ♁ Země, ♂ Mars, ♃ Jupiter, ♄ Saturn, ⛢ Uran, ♆ Neptun, ♇ Pluto



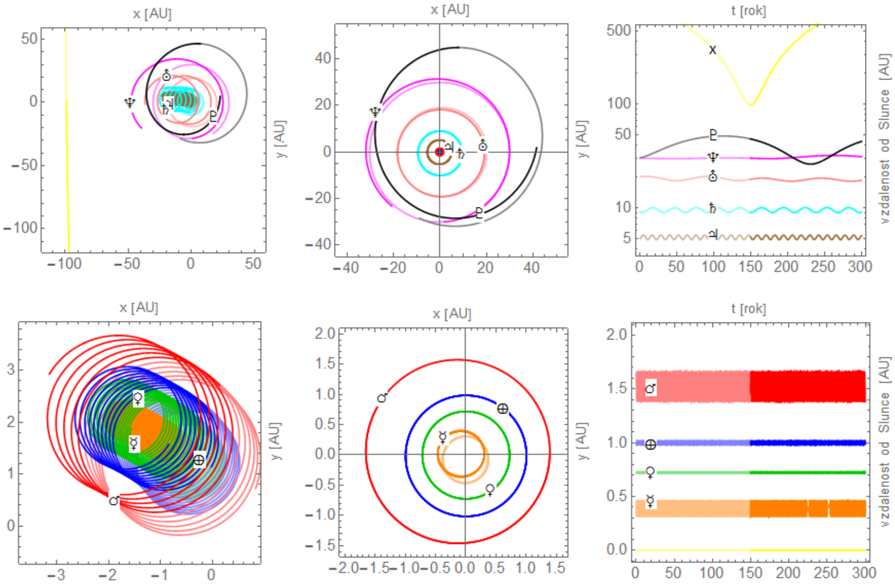
návštěva cizího tělesa: $M = 10M_{\odot}$, $b = 1000\mathrm{AU}$

těleso X, ☿ Merkur, ♀ Venuše, ♁ Země, ♂ Mars, ♃ Jupiter, ♄ Saturn, ♅ Uran, ♆ Neptun, ♇ Pluto



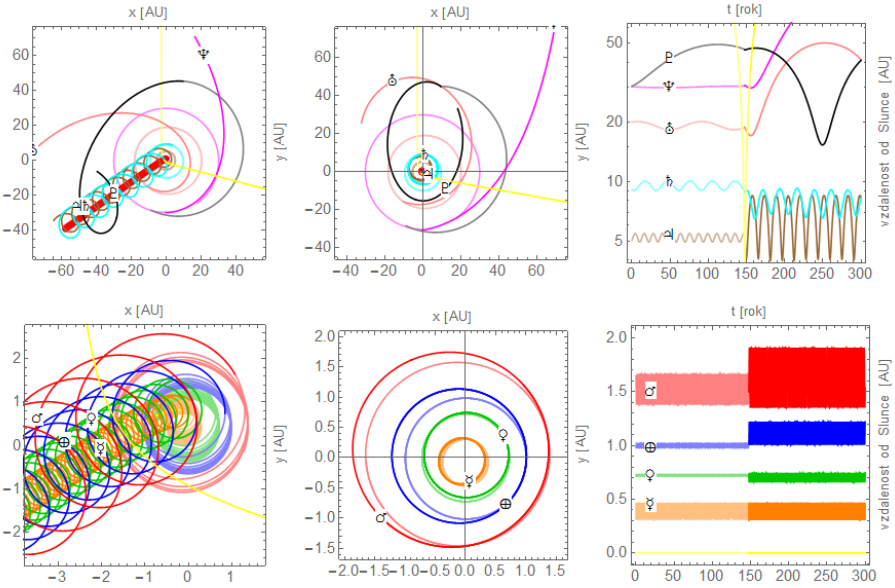
návštěva cizího tělesa: $M = 1M_\odot$, $b = 100\text{AU}$

těleso X, ☿ Merkur, ♀ Venuše, ♁ Země, ♂ Mars, ♃ Jupiter, ♄ Saturn, ⛢ Uran, ♆ Neptun, ♇ Pluto



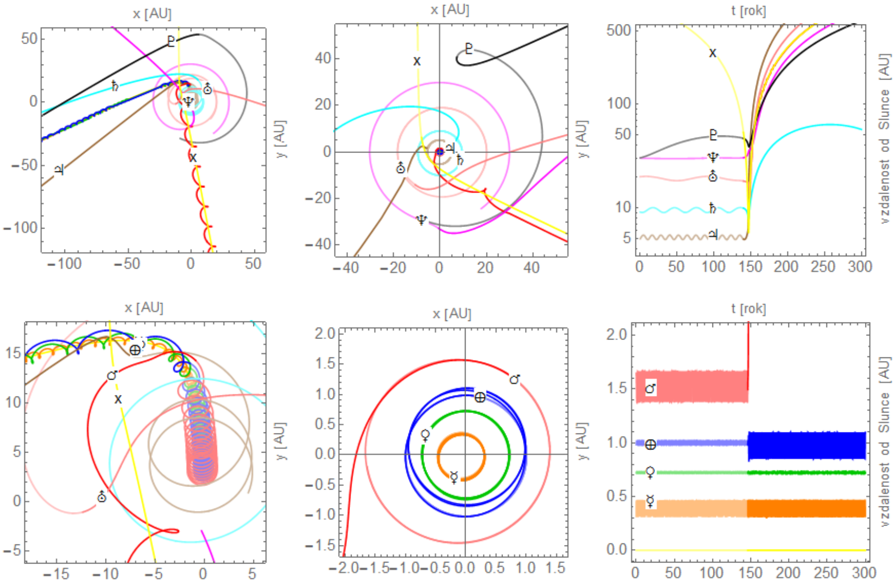
návštěva cizího tělesa: $M = 0.1M_{\odot}$, $b = 3\mathrm{AU}$

těleso X, ☿ Merkur, ♀ Venuše, ♁ Země, ♂ Mars, ♃ Jupiter, ♄ Saturn, ⛢ Uran, ♆ Neptun, ♇ Pluto



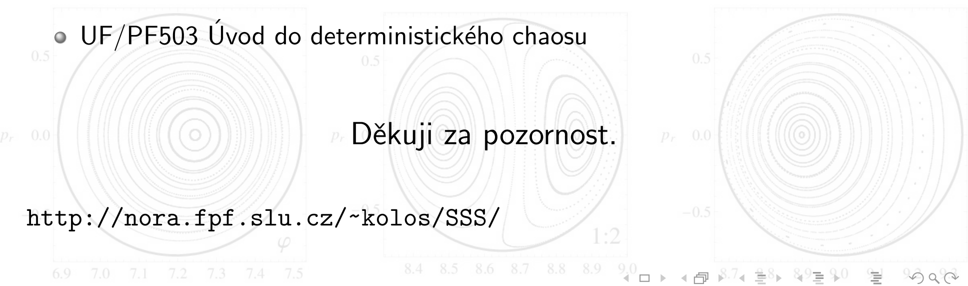
návštěva cizího tělesa: $M = 5M_{\odot}$, $b = 10\mathrm{AU}$

těleso X, ☿ Merkur, ♀ Venuše, ♁ Země, ♂ Mars, ♃ Jupiter, ♄ Saturn, ⛢ Uran, ♆ Neptun, ♇ Pluto



Shrnutí - co jsme se dnes dozvěděli?

- nelineární systém (popsaný i jednoduchými zákony) může vést ke vzniku divokého (zdánlivé náhodného) chování - **deterministický chaos**
- sluneční soustava je nelinearní dynamický systém
- přestože je sluneční soustava nelinearní dynamický systém jen tak něco ji nerozhodí (stabilní stav)
- Ljapunovův čas (doba za kterou se projeví chaos) je 5 Myr
- sluneční soustava bude (pravděpodobně) stejná jako dnes milióny let (a více)



- UF/PF503 Úvod do deterministického chaosu

Děkuji za pozornost.

http://nora.fpf.slu.cz/~kolos/SSS/