Příklad 1. Určete povrch chladicí věže JE Temelín zadané rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

kde $a = 50$ a $c = 90$ metrů. Jako vhodná se jeví parametrizace

$$x = a\sqrt{1+u}\cos(v), \quad y = a\sqrt{1+u}\sin(v), \quad z = cu,$$

kde $v \in [0, 2\pi), u = [-1, 0.7]$.

Příklad 2. Jakou práci vykoná pole $\vec{F} = (x^2, xy)$ z bodu $A = [-1, 0]$ do bodu $B = [1, 0]$ po horní polovině kružnice

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Jakou práci pole vykoná pokud se z bodu A vrátí po kružnici zpět do bodu A.

Příklad 3. Ověřte větu

$$\iint_A \mathrm{div}\vec{F}\,\mathrm{d}A = \int_{\partial A} \vec{F}\cdot\vec{n}_0\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

kde A je jednotkový kruh, ∂A je jednotková kružnice, $\vec{n}_0$ normálový vektor kružnice. Vektorové pole $\vec{F}$ je

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right).$$

Příklad 4. Určete obvod horizontu Schwarzschildovy černé díry

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2). \tag{2}$$

Obvod je délka kružnice zadané $r = 2M$, pro $\theta = \pi/2, t =$const. Co z výsledku o souřadnici r usuzujete?

Příklad 5. Vypočítejte integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 6. Najděte řešení diferenciální rovnice s počátečními podmínkami

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

Interpretujte výsledek, jaký systém diferenciální rovnice popisuje?