Řešní velmi lehké záločtové písemky 1b - 2011

Text neprošel korekcí a tak se v něm mohou vyskytovat chyby

Příklad 1. Vypočtěte integrál

$$\int_A yx^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

kde A je množina ohraničená křivkami

$$y_1 = x^2 - 2x, \tag{2}$$
$$y_2 = x. \tag{3}$$

Řešení: Jedná se o dvojný integrál a nejdříve je nutné nakreslit si obrázek množiny A a z tohoto obrázku určit meze integrace. Křivka $y_2(x) = x$ je jednoduchá přímka procházející počátekm, křívka $y_1(x) = x^2 - 2x$ je parabola s minimem v bodě $A = [1, -1]$ a s průsečíky s osou x na $P_{x1} = [0, 0]$ $P_{x2} = [0, 2]$. Komu nakreslení těchto dvou křivek dělá potíže, nechť si zopakuje vyšetřování průběhu funkce. Průsečíky obou křivek najdeme tam, kde platí

$$y_1 = y_2 \tag{4}$$

tedy v bodech $A = [0, 0]$ a $B = [3, 3]$. Vzhledem k tomu, že množina není elementární oblast (obdelníček), ale různě se křiví v závislosti na souřadnicích x, y, je jasné, že i meze musí vykazovaz závislost na souřadnicích x, y. Zvolíme napřed meze pro souřadnici x jako

$$0 \leq x \leq 3 \tag{5}$$

a mez pro součadnici y se nyní bude měnit v závislosti na x od křivky $y_1(x)$ (dolní) do $y_2(x)$ (horní), tedy

$$x^2 - 2x \leq y \leq x. \tag{6}$$

Známe-li již meze, můžeme náš dvojný integrál (1) napsat jako dvojnásobnou integraci

$$\int_0^3 \left(\int_{x^2-2x}^{x} yx^2 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Je dobré si povšimnout, že napřed integrujeme podle proměných jejichž meze jsou závislé na souřadnicích a meze, které jsou na souřadnicích nezávislé (čísla) budeme používat až nakonec. Dávejte dobrý pozor, ke ktré proměnné meze patří.

Nyní už budmeme integrovat, integrujeme pouze podle jedné souřadnice - ostatní se chovají jako konstanty.

$$(7) = \int_0^3 \left[\frac{y^2}{2} x^2 \right]_{x^2-2x}^{x} \mathrm{d}x \tag{8}$$
$$= \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2} x^2 - \frac{(x^2-2x)^2}{2} x^2 \right) \mathrm{d}x. \tag{9}$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^3 (-x^6 + 4x^5 - 3x^4) \mathrm{d}x \tag{10}$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^7}{7} + \frac{4x^6}{6} - \frac{3x^5}{5} \right]_0^3 = \frac{486}{35}. \tag{11}$$

Výsledkem je obsah utvaru vymezeného fukcí $F(x, y) = yx^2$ nad množinou A.

Příklad 2. Vypočtěte dalsí integrál

$$\int_A \sqrt{(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{12}$$

kde A je mezikruží

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4. \tag{13}$$

Řešení: Každého snad napadne, že $x^2 + y^2$ je vzdálenost (kvadrát) od středu a tudíž že by bylo vhodné změnit kartézské souřadnice x, y na polární souřadnice r, α. Polární souřednice, které lépe vystihují symetrii úlohy jsou

$$x(\alpha) = r\cos(\alpha), \tag{14}$$
$$y(\alpha) = r\sin(\alpha), \tag{15}$$

kde $r > 0$ a $\alpha \in (0, 2\pi)$. Je dobré poznamenat, že platí

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{16}$$

Také upozorňuji, že pro element plochy v kartzských a polárních souřadnicích platí

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha. \tag{17}$$

Objevuje se zde člen $J = r$ - Jacobián transformace, který pak nesmíme zapomenout do integrálu přidat.

Podmínka (13) pro množinu A bude v polárních souřadnicích vypadat

$$1 \leq r \leq 2. \tag{18}$$

Zde jsme použili vlastnost (16) a celou nerovnici odmocnili.

Nyní již můžeme napsat integrál (12) jako

$$(12) = \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} r \cdot r \,\mathrm{d}\alpha \right) \mathrm{d}r \tag{19}$$
$$= \int_1^2 \left[r^2 \alpha \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 = \frac{14}{3}\pi. \tag{20}$$

Příklad 3. Nalezněte délku kružnice s poloměrem R zadanou parametricky jako

$$x(t) = R\cos(t), \tag{21}$$
$$y(t) = R\sin(t), \tag{22}$$

kde parametr $t \in (0, 2\pi)$.

Řešení: Pro délku křivky (křivkový integrál 1. druhu) platí

$$L = \int_\gamma |\vec{r}| \,\mathrm{d}t, \tag{23}$$

kde $\vec{\tau}$ je tečný vektor ke křivce γ. Pro vektor $\vec{\tau}$ a jeho velikost $|\vec{\tau}|$ platí

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right), \quad |\vec{\tau}| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}. \tag{24}$$

V našem případě máme tečný vektor $\vec{\tau}$

$$\vec{\tau} = (-R\sin t, R\cos t)\,. \tag{25}$$

a velikost $|\vec{\tau}|$ je

$$\begin{aligned} |\vec{\tau}| &= \sqrt{(R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} && (26)\\ &= R\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = R. && (27) \end{aligned}$$

Délka kružnice (23) je

$$\int_\gamma |\vec{\tau}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}t = [R]_0^{2\pi} = 2\pi R. \tag{28}$$

Příklad 4. Jakou práci vykoná silové pole $\vec{F} = (x^2, y^2)$ posune-li břemeno z bodu $(1,0)$ do $(5,2)$ po křivce

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2 + 1, && (29)\\ y(t) &= t, && (30) \end{aligned}$$

kde pro parametr t platí $t \in (0,2)$.

Řešení: Pro práci (křivkový integrál 2. druhu) platí

$$W = \int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}t, \tag{31}$$

kde $\vec{\tau}$ je tečný vektor ke křivce γ.

V našem případě platí

$$\vec{\tau} = (2t, 1), \quad \vec{F} = ((t^2+1)^2, t^2). \tag{32}$$

Práce (31) v našem případě je

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}t &= \int_0^2 ((t^2+1)^2, t^2)\cdot(2t,1)\,\mathrm{d}t && (33)\\ &= \int_0^2 (2t^5 + 4t^3 + t^2 + 2t)\,\mathrm{d}t && (34)\\ &= 44. && (35) \end{aligned}$$

Příklad 5. Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y^2 \cdot y' = 4x^3, \tag{36}$$

Proveďte zkoušku a napište o jaký typ diferenciální rovnice se jedná.

Řešení: Jedná se o nelineární diferenciální rovnici prvního řádu. Budmem ji řešit metodou separace proměných - budeme se snažit na jednu stranu rovnice převést x a na druhou stranu y. Nesmíme také zapomínat na

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{37}$$

Rovnice (36) je

$$\begin{aligned} y^2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 4x^3, && (38)\\ y^2\,\mathrm{d}y &= 4x^3\,\mathrm{d}x, && (39)\\ \int y^2\,\mathrm{d}y &= \int 4x^3\,\mathrm{d}x, && (40)\\ \frac{y^3}{3} &= x^4 + c, && (41)\\ y &= \sqrt[3]{3(x^4+c)} && (42)\\ & && (43) \end{aligned}$$

Pro provedení zkoušky musíme vyjádřit derivaci y'

$$y' = \frac{1}{3}(3x^4+3c)^{-2/3}(12x^3). \tag{44}$$

Rovnice (36) je

$$(3x^4+3c)^{2/3}\cdot(3x^4+3c)^{-2/3}(4x^3) = 4x^3, \tag{45}$$

a tím je rovnice ověřena.

Příklad 6. Pokuste se najít **všechna** řešení diferenciální rovnice

$$y' + yx = x \tag{46}$$

Řešení: Jedná se o lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Proto můžeme využít

$$y_*(x) = y_h(x) + y_p(x), \tag{47}$$

kde y_h je řešní rovnice homogení a y_p je partikulární řešení rovnice (46). Napřed budeme hledat řešení homogení rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + yx &= 0, && (48)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -yx, && (49)\\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -x\mathrm{d}x, && (50)\\ \int\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int x\mathrm{d}x, && (51)\\ \ln y &= \frac{-x^2}{2} + c, && (52)\\ \mathrm{e}^{\ln y} &= \mathrm{e}^{-x^2/2+c}, && (53)\\ y &= \mathrm{e}^{-x^2/2+c} = k\mathrm{e}^{-x^2/2}, && (54)\\ & && (55) \end{aligned}$$

kde $k = \mathrm{e}^c$ je nová konstanta. Homogení řešení je

$$y_h = k\,\mathrm{e}^{-x^2/2}. \tag{56}$$

Partikulární řešení rovnice (46) se můžeme pokusit uhodnout. Pokud zvolíme

$$y = 1, \quad y' = 0, \tag{57}$$

pak je (46) splněna.

Všechna řešení rovnice (46) jsou

$$y_* = k\,\mathrm{e}^{-x^2/2} + 1. \tag{58}$$

Partikulární řešení rovnice (46) můžeme také získat metodou variace konstant. Konstanta u homogeního řešení (56) se stane funkcí proměné $k = k(x)$, tedy

$$y(x) = k(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}. \tag{59}$$

Pokud $k = k(x)$ pak první derivace je

$$y' = k'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} + k(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot \left(-\frac{2x}{2}\right). \tag{60}$$

Naše diferenciální rovnice (46) pak je

$$\begin{aligned} k'\,\mathrm{e}^{-x^2/2} - k\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot x + \; k\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot x &= x & (61)\\ k'\,\mathrm{e}^{-x^2/2} &= x. & (62)\end{aligned}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} k' &= x\,\mathrm{e}^{x^2/2}, & (63)\\ \int \mathrm{d}k &= \int x \cdot \mathrm{e}^{x^2/2}\,\mathrm{d}x. & (64)\end{aligned}$$

Pro vyřešení integrálu

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{x^2/2}\,\mathrm{d}x, \tag{65}$$

použijeme substituci

$$x^2/2 = t, \quad x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t. \tag{66}$$

Nyní hledaná funkce $k(x)$ je

$$k(x) = \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + c = \mathrm{e}^{x^2/2} + c, \tag{67}$$

kde intekrační konstantu c můžeme položit rovnu nule, protože nám bude stačit pouze jedno pratikulární řešení. Parikulární řešení rovnice (46) získané metodou variace konstant je

$$y_p = k(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2} = 1, \tag{68}$$

což je stejné řešení jako to, jenž jsme pouze uhodli.